Q
56
S7

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-DIXIÈME, 1956

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER FASCICULE

20 AVRIL 1956

Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique et du Gouvernement

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1956

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 50 frs

AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant due référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

TABLE DE MATIÈRES

PAGES

Manuscrits reçus le 31 janvier 1956.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Sur l'estimation des erreurs dans l'intégration numérique des équations différentielles linéaires du second ordre, par F. SERVAIS 5

Calcul des probabilités dans certains espaces topologiques, par R. LAVENDHOMME (*à suivre*) 9

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Matrices de projection et techniques d'itération, par B. FRAEYS de VEUBEKE 37

Remarques sur un phénomène signalé par M. G. Toraldo di Francia, par A. BIOT 67

Une méthode d'extraction des ions formés dans une combustion vive, par L. VANREUSEL et J. M. DELFOSSE 67

Etude de la réaction nucléaire Al^{27} (n, p) Mg^{27} avec neutrons de 14 MeV, par Y. OSHIMA 73

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg 100 fr.
dans les autres pays 150 fr.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 70, n° I, p. 5-9

MANUSCRITS REÇUS LE 31 JANVIER 1956

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur l'estimation des erreurs dans l'intégration numérique des équations différentielles linéaires du second ordre

PAR

F. SERVAIS

Résumé. On étudie la propagation de l'erreur dans la solution numérique de l'équation $y'' = y\,f(x) + g(x)$ par une méthode d'intégration approchée utilisant des différences symétriques. On montre que, pour des intervalles h suffisamment petits, à une erreur de troncature de l'ordre de h^4 se superpose une erreur héréditaire. Pour $f(x) > 0$, celle-ci croît exponentiellement avec le rang de l'intervalle, et possède un coefficient de l'ordre de h^5. Pour $f(x) < 0$, l'erreur héréditaire est oscillante avec une amplitude de l'ordre de h^4.

On sait que toute équation différentielle linéaire du second ordre peut se mettre sous la forme

$$y'' = y\,f(x) + g(x) \qquad (1)$$

et nous supposerons que la résolution de cette équation s'effectue en calculant y de proche en proche, en des points d'abscisse x_n espacés de h, par la formule [1]

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = (h^2/12)\,(y''_{n+1} + 10\,y''_n + y''_{n-1}) \qquad (2)$$

qui devient, en tenant compte de (1), et avec $f_n = f(x_n)$,

$$y_{n+1}(1-h^2f_{n+1}/12) - 2\,y_n(1+5h^2f_n/12) + y_{n-1}(1-h^2f_{n-1}/12) = 0 \qquad (2')$$

[1] Cfr. W. E. Milne, *Numerical Solution of Differential Equations*, New-York & London 1953.

Le premier terme négligé dans (2) et (2′) et produisant l'erreur de troncature est

$$t_n = -h^6 y^{VI}(x)/240 \qquad (3)$$

où x est un point de l'intervalle (x_{n-1}, x_{n+1}).

La formule (2′) permet le calcul de y_{n+1} et la seule erreur proviendrait de (3) si y_n et y_{n-1} étaient corrects.

En fait, ceux-ci sont eux-mêmes affectés d'une erreur héréditaire provenant de l'accumulation des erreurs de troncature aux pas précédents. Soit z la valeur de y qu'on aurait obtenue sans négliger (3) dans les pas précédents, c.-à-d. en le calculant par

$$z_{n+1}(1-h^2f_{n+1}/12) - 2z_n(1+5h^2f_n/12) + z_{n-1}(1-h^2f_{n-1}/12) = t_n \qquad (4)$$

L'erreur globale sur y est

$$y - z = e \qquad (5)$$

Soustrayant (4) de (2′), il vient, en posant,

$$h^2f_n/12 = p_n \qquad (6)$$

$$e_{n+1}(1-p_{n+1}) - 2e_n(1+5p_n) + e_{n-1}(1-p_{n-1}) + t_n = 0 \qquad (7)$$

Si le pas h est suffisamment petit pour qu'on puisse considérer les p_n et les t_n comme constants sur quelques intervalles successifs, la propagation de l'erreur s'étudie localement en remplaçant (1) par une équation aux différences, linéaire et à coefficients constants

$$e_{n+1}(1-p) - 2e_n(1+5p) + e_{n-1}(1-p) + t = 0 \qquad (8)$$

dont l'équation caractéristique est

$$(1-p)r^2 - 2(1+5p)r + (1-p) = 0 \qquad (9)$$

Dans la discussion des racines de (9) on distingue les cas suivants :

a) les racines sont réelles si $|(1+5p)| \geqslant |(1-p)|$ c.-à-d.
(cas *a* 1) si $p \leqslant -1/2$
ou (cas *a* 2) si $p \geqslant 0$.

La solution de (9) est alors de la forme

$$e_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + t/12p \qquad (10)$$

Les constantes A_1 et A_2 se déduisent des valeurs initiales e_0 et e_1, tandis que le dernier terme, de l'ordre de h^4 par (3) et (6), est la solution constante de (8).

Dans le cas *a* 1, les racines sont négatives et inverses l'une de l'autre; il y a donc une racine supérieure en module à l'unité et

l'erreur croît exponentiellement avec n, avec alternance de signe à chaque pas.

Dans le cas $a\,2$, les racines sont positives si $p < 1$ (cas $a\,2\alpha$; erreur à croissance exponentielle en n et de signe constant), négatives si $p > 1$ (cas $a\,2\beta$; erreur à croissance exponentielle et de signe alterné); enfin, si $p = 1$, r_1 et r_2 s'annulent et l'erreur est constante et égale à $t/12$.

b) Si $|(1 + 5p)| = |(1 - p)|$, il y a racine double r et (10) est remplacé par

$$e_n = A_1 r^n + A_2 n r^n + t/12\,p \qquad (11)$$

Les deux cas possibles sont

(cas $b\,1$) $p = 0$, $r = 1$: l'erreur croît linéairement avec n.

(cas $b\,2$) $p = -1/2$, $r = -1$: l'erreur oscille avec une valeur absolue croissant linéairement avec n.

Le cas b est, en fait, assez académique puisque p ne garde jamais une valeur constante sur plus d'un petit nombre d'intervalles.

c) Les racines sont imaginaires si $-1/2 < p < 0$, et la solution de (9) est alors

$$e_n = A_1 \sin nk + A_2 \cos nk + t/12\,p \qquad (12)$$

avec

$$k = \arccos \frac{1 + 5p}{1 - p} \qquad (13)$$

et l'erreur est oscillante.

Pour voir l'effet du choix de h sur la croissance de l'erreur, considérons d'abord le cas ($a\,2$), qui correspond à $f(x) > 0$. En réduisant h, on passe du cas ($a\,2\beta$) à erreur croissante de signe alterné au cas ($a\,2\alpha$) à erreur monotonement croissante. Dans ce second cas, le terme dominant de (10) croît comme r_1^n (où r_1 est la plus grande des deux racines positives de (9)), dont le développement en puissances croissantes de $\sqrt{p}$ (qui est de l'ordre de h) est

$$r_1 = 1 + \sqrt{12\,p} + 6\,p + \ldots$$

Par suite :

$$r_1^n = 1 + n\sqrt{12\,p} + 6\,n^2 p + \ldots \qquad (14)$$

Remplaçant h par un intervalle plus petit h/m, (6) montre que p est divisé par m^2, mais pour arriver au même point, il faut prendre m fois plus d'intervalles; remplaçant donc p par p/m^2 et n par mn dans (14), on voit que l'erreur ne change pas, et à ce moment, une

subdivision de l'intervalle ne réduit pas la croissance de l'erreur. Il reste néanmoins vrai que le coefficient A_1 de r_1^n dans (10) et le terme $t/12\,p$ décroissent avec h.

Supposons par exemple pour simplifier que les valeurs initiales y_0 et y_1 soient données sans erreur; (10) doit alors s'annuler pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui détermine A_1, qui devient, par (3) et (6) :

$$A_1 = \frac{t_n\,(r_2 - 1)}{12\,p\,(r_2 - r_1)} \simeq -\frac{t}{4\,\sqrt{12\,p}} \simeq \frac{h^5\,y^{VI}}{960\,\sqrt{f(x)}}$$

de même :

$$A_2 = -\frac{t_n\,(r_2 - 1)}{12\,p\,(r_2 - r_1)} - \frac{t}{12\,p} \simeq -\frac{h^5\,y^{VI}}{960\,\sqrt{f}} - \frac{h^4\,y^{VI}}{240\,f}.$$

L'erreur globale se compose finalement d'un terme en h^4 décroissant vers l'erreur de troncature et d'un terme héréditaire en h^5 croissant exponentiellement.

Si $f(x)$ est négatif, on passe, en réduisant h, du cas (*a* 1) (erreur croissante) au cas (*c*) (erreur oscillante). La seule amélioration possible par une réduction ultérieure de h n'affecte que les coefficients de (12). Avec $e_0 = e_1 = 0$, on trouve

$$A_1 = \frac{\cos k - 1}{\sin k} \cdot \frac{t}{12\,p}\ ;\ A_2 = -\frac{t}{12\,p}$$

Pour p petit, (13) donne approximativement $k = \sqrt{-12\,p}$ et le coefficient $A_1 = -kA_2/2$ est en h^5, alors que A_2 est de l'ordre de h^4; en définitive, c'est donc A_2 qui fixe l'amplitude de l'erreur oscillante.

Dans les applications pratiques, les conditions initiales sont imposées sur y_0 et y'_0, et y_1 doit s'en déduire par un calcul approché produisant une erreur e_1 non nulle. La contribution de celle-ci sur les coefficients de l'erreur héréditaire se calcule facilement de la même façon.

Centre d'étude et d'exploitation
des Calculateurs Electroniques
BRUXELLES.

Le 19 janvier 1956.

1127-25

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 70, nº I, p. 9-36

Calcul des probabilités dans certains espaces topologiques

PAR

René LAVENDHOMME

Professeur à l'Université Lovanium, Congo.

INTRODUCTION (*)

Ce travail a pour objet les mesures de probabilité définies sur un espace abstrait, spécialement sur un espace de Banach. Cette étude a été amorcée par M. Fréchet [14, 15], mais c'est surtout la thèse de doctorat de Mlle Mourier [26] et les mémoires de M. Fortet et Mlle Mourier [12, 13] qui ont montré tout son intérêt. Mlle Mourier obtient essentiellement une loi des grands nombres dans le cas des espaces de Banach séparables, et le théorème central limite dans le cas d'un espace de Hilbert séparable.

Le calcul des probabilités sur un espace topologique apparaît comme une section de la théorie de la mesure, puisque aussi bien chaque variable aléatoire a pour loi de probabilité une mesure définie sur le σ-anneau des parties « probabilisables ». Ce qui est essentiel, c'est de définir correctement une topologie utile sur l'ensemble des variables aléatoires ou des mesures. Un type de convergence très employé est la convergence « en loi » ou convergence « au sens de Bernoulli ». C'est elle que l'on rencontre, par exemple, dans le théorème central limite ou théorème de Laplace-Gauss. Il nous faut donc, dans le cas général, définir la convergence d'une suite de lois vers une loi limite et, pour cela, faire entrer les mesures dans des espaces topologiques.

Le procédé utilisé consiste en une extension du théorème de Riesz. On montre comment toutes les mesures peuvent être considérées comme des formes linéaires et continues sur certains

(*) Les nos entre crochets renvoient à la bibliographie; les nos entre parenthèses renvoient aux paragraphes du mémoire.

espaces U de fonctions numériques continues et bornées. La topologie qui s'adaptera aux variables aléatoires ou aux mesures s'impose alors d'elle-même : c'est la topologie du dual fort de U.

Cette méthode nous suggère notre plan. Les chapitres I et II sont consacrés aux espaces de mesures, et particulièrement à l'espace des mesures finies sur un espace métrique. Le chapitre III démontre le théorème central limite, et le chapitre IV conclut en appliquant notre théorie à la convergence d'une répartition empirique vers une répartition théorique.

Toute fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace des fonctions continues réelles et bornées définies sur l'intervalle [0,1] de la droite peut être considérée comme intégrale de ces fonctions par rapport à une mesure définie sur un σ-anneau borélien de parties appartenant à cet intervalle. Tel est l'énoncé que l'on peut donner du théorème fondamental démontré par F. Riesz en 1909 [29]. N. Bourbaki [4] a démontré de même que des mesures sur un espace localement compact peuvent être définies comme éléments du dual fort, pour la topologie de la convergence uniforme, de l'espace des fonctions continues nulles en dehors d'un compact.

Au lieu de considérer les fonctions continues nulles en dehors d'un compact, comme le fait Bourbaki, nous pouvons utiliser n'importe quel espace U de fonctions continues et bornées qui, avec une fonction v, contient toutes les fonctions continues qui lui sont inférieures. Si on munit ces espaces de fonctions d'une pseudo-topologie convenable, la technique de définition des mesures adoptée par Bourbaki peut être utilisée non seulement pour un espace localement compact mais pour un espace normal. Nos théorèmes I et II (Chap. I, par. I) démontrent l'équivalence de cette définition des mesures avec la définition classique.

Il importe de remarquer que les fonctions de U ne doivent pas nécessairement être réelles; elles peuvent prendre leur valeurs dans un espace de Banach. Dans ce cas, nous avons montré (Chap. I, par. 2, th. 3) que la valeur de la mesure est précisément l'intégrale à la Bochner [3] de la fonction intégrée.

Cependant, les espaces, de mesures ainsi obtenus sont des duals non topologiques mais pseudo-topologiques. Nous avons toutefois pu utiliser la théorie de la dualité car le pseudo-dual est identique au dual d'un espace limite inductive d'espaces de Banach.

Une mesure ne doit pas, pour être déterminée, être connue sur

U tout entier. Il suffit qu'elle le soit sur un ensemble dense dans U pour une topologie rendant la mesure continue. En effet, la mesure est alors déterminée par continuité. Dans cette voie, notre principal résultat est une généralisation du théorème de Weierstrass-Stone sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes. On peut montrer en effet (Chap. I, par. 5) qu'une fonction sommable bornée en mesure peut être approchée presque uniformément sur un ensemble intégrable A par des polynomes en un ensemble H de fonctions sommables bornées en mesure, pourvu que les fonctions de H séparent les points de A. La démonstration utilise essentiellement la technique du passage à l'espace de Kakutani.

Notre chapitre II étudie plus particulièrement les mesures finies sur un espace métrique. L'espace des mesures finies sera construit en prenant pour espace U l'ensemble de toutes les fonctions continues et bornées. On démontre alors que cet espace de mesures est un espace de Banach, et que tout ensemble ouvert est intégrable pour toute mesure finie (Chap. II, th. II).

La topologie ainsi introduite sur les mesures finies peut recevoir une interprétation importante. Prohorov avait proposé pour les mesures de probabilité une topologie très utile dans la pratique [28]. Une suite de mesures (m_i) converge au sens de Prohorov vers une mesure m_o si, pour tout ensemble A mesurable dont la frontière est de mesure nulle pour la mesure m_o, la suite des $m_i(A)$ converge vers $m_o(A)$. Nous avons démontré que cette topologie est équivalente à celle du dual fort de l'ensemble des fonctions continues et bornées.

On peut alors étudier les transformations de mesures d'un espace métrique dans un espace de Banach. Si $f(x)$ est une transformation de l'espace métrique en un espace de Banach qui est sommable à la Bochner pour une mesure m_o finie, la transformée de cette mesure m_o est une mesure finie (th. VIII, Chap. II). De plus, si une suite (m_i) de mesures finies converge vers m_o, les transformées des m_i existent et convergent vers la transformée de m_o (Chap. II, par. 3, Th. IX).

Mlle Mourier a utilisé une notion de fonctionnelle caractéristique introduite par Kolmogoroff, et déjà employée par Le Cam [23] dans l'étude des fonctions aléatoires. C'est une généralisation toute naturelle de la notion de fonction caractéristique. Cependant, elle ne paraît pas convenir dans le cas des espaces de Banach. En effet,

il peut se faire que des fonctionnelles caractéristiques convergent vers une fonctionnelle définie positive égale à 1 à l'origine, sans que celle-ci soit une fonctionnelle caractéristique, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un espace de dimension finie. Et même quand la fonctionnelle limite est caractéristique, on n'est pas assuré de la convergence des lois. Il peut même se faire que les lois convergent vers une loi limite et que les fonctionnelles caractéristiques convergent vers une fonctionnelle caractéristique limite, sans que celle-ci soit fonctionnelle caractéristique de la loi limite.

Ces difficultés nous ont amené à compléter la notion de fonctionnelle caractéristique par celle de mesure caractéristique. Nous entendons par là le produit multiplicatif (au sens introduit par M. Schwartz pour les distributions) de la mesure par une exponentielle généralisant le e^{itx} classique :

$$e^{i<x^*, x>},$$

où le crochet désigne le produit scalaire d'un élément x^* du dual de l'espace de Banach X par un élément x de cet espace. Et nous avons montré que cette mesure caractéristique n'a plus les inconvénients de la fonctionelle caractéristique, (Chap. III, par. I, th. II, III).

C'est l'emploi de la mesure caractéristique combinée avec la fonctionnelle caractéristique qui nous permet ensuite (Chap. IV, par. 2) de démontrer le théorème central limite. Ce théorème était connu, depuis la thèse de Mlle Mourier, dans les espaces de Hilbert séparables; il avait été étendu à une classe d'espaces un peu plus générale par M. Fortet et Mlle Mourier [12]. Il est obtenu ici dans un espace de Banach quelconque. On peut d'ailleurs le généraliser. Si, au lieu de considérer l'espace des mesures finies, on considère le dual de l'espace des fonctions continues nulles en dehors d'une boule, on obtient des renseignements sur la convergence locale dans le cas de mesures ne répondant pas aux conditions classiques d'existence des moments.

Un dernier chapitre applique enfin ces résultats au problème de la convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. Le fait de la convergence presque sûre et de la convergence en moyenne était connu dans un espace métrique séparable depuis un article de M. Fortet et Mlle Mourier [13]. Or, les écarts entre les répartitions empiriques et la répartition théorique peuvent être considérés comme des éléments aléatoires à valeurs

dans l'espace des mesures. Ces éléments aléatoires convergent vers un élément limite. Nous avons obtenu la caractéristique de cet élément ainsi que la caractéristique du carré de sa norme.

Nous sommes heureux de pouvoir remercier ici Monsieur le Professeur R. Ballieu qui a bien voulu nous guider dans la préparation de ce travail. Nous devons dire aussi toute notre gratitude à Monsieur Fortet qui nous a fait profiter d'entretiens nombreux et utiles.

Chapitre I

ESPACES DE MESURES SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Le but de ce chapitre est d'étudier une méthode générale permettant de définir des espaces de mesures sur un espace topologique. Dans un premier paragraphe, nous donnerons une définition des mesures généralisant celle donnée dans Bourbaki (Livre VI, [1]) et nous démontrerons l'équivalence entre les définitions classiques des mesures comme fonctions d'ensemble complètement additives, définies sur un σ-anneau de parties et les définitions, que nous appellerons intégrales, qui considèrent les mesures comme des opérations linéaires et continues sur certains espaces vectoriels topologiques formés de fonctions continues. Cette équivalence est une généralisation du théorème de Riesz (cfr Riesz [29], Banach [2]) démontré par Riesz et par Lebesgue [22] pour les mesures sur un intervalle de la droite réelle. Le deuxième paragraphe montrera que les définitions intégrales des mesures correspondent bien à la définition de l'intégrale à la Bochner (*) des fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach. Ce paragraphe et les suivants seront valables sur une classe d'espaces topologiques incluant les espaces normaux. On achèvera alors de préciser dans le troisième paragraphe la correspondance entre σ-anneaux de parties et espaces de mesures. Nous pourrons alors dans le paragraphe 4 étudier la topologie des espaces de mesures et montrer que les espaces de mesures sont complets et borno-

(*) Cf. Bochner [3]. Pour les différents types d'intégrales de fonctions à valeur dans un espace vectoriel voir aussi par ex. Hille [13], Pettis [27].

logiques (**). Enfin, le dernier paragraphe sera consacré à une extension importante du théorème de Weierstrass-Stone sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes.

§ 1. Définition des espaces de mesures et théorème de Riesz

1) Soit X un espace topologique et X′ un espace de Banach. Soit U un espace vectoriel de fonctions continues définies sur X et à valeurs dans X′, le champ des scalaires étant les nombres réels ou complexes. Nous supposerons que U est formé de fonctions bornées en norme et vérifie l'axiome suivant :

Axiome (*A*)

Si u est dans U, alors toute fonction continue v telle que, pour tout x on ait :

$$|v(x)| \leqslant |u(x)|$$

est aussi dans U.

Nous considérons sur U la pseudo-topologie suivante :

Définition 1

Des u_i de U sont dits *pseudo-converger* (*P*) vers 0 si les u_i convergent uniformément vers 0 et si il existe une fonction u de U telle que, pour tout x de X, on ait :

$$|u_i(x)| \leqslant |u(x)|.$$

Soit RU l'ensemble des fonctions continues et bornées définies sur X et à valeurs réelles, telles que, pour tout y constante de X′, on ait :

$$f(x).y \in \mathrm{U}.$$

Soit RU′ le dual pseudo-topologique de RU c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur RU qui soient continues pour la pseudo-topologie (P).

Définition 2

Nous appellerons *mesure définie sur* U, toute opération m linéaire de U dans X′ qui soit continue pour la pseudo-topologie (P) et qui prolonge un élément rm de RU′, c'est-à-dire telle qu'il existe un

(**) Cf. Bourbaki [5].

élément rm de RU′ tel que, pour tout u de la forme

$$u(x) = f(x).y,$$

où $\begin{cases} f(x) \in \mathrm{RU} \\ y \text{ est une constante de } \mathrm{X}', \end{cases}$

on ait :

$$m\,(u(x)) = m(f(x).y) = rm\,(f(x)).\,y\,. \qquad (1)$$

Nous désignerons par M l'ensemble des mesures définies sur U et par RM ou RU′ les mesures sur RU. Mais par abus de langage nous identifierons le plus souvent les éléments de M et leur correspondant de RU′. Cet abus de langage s'explique par la relation (1). Il sera entièrement justifié quand nous aurons montré que les définitions intégrales que nous venons de donner des mesures correspondent bien aux définitions classiques et que, donc, la connaissance d'un élément de RU′ détermine la mesure comme fonction complètement additive d'ensemble, donc détermine les intégrales à la Bochner des fonctions continues à valeur dans X′ qui forment l'espace U.

Définition 3

Une mesure est dite *positive* si sa correspondante dans RM est positive, c'est-à-dire si, pour toute f positive de RU, on a :

$$m\,(f(x)) \geqslant 0.$$

2) Il nous faut maintenant justifier notre terminologie en montrant que tout m de M est bien une mesure au sens habituel.

Soit J^+ l'ensemble des fonctions numériques positives, semi-continues inférieurement (finies ou non), et qui soient enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de RU.

Définition 4

Etant donnée une mesure positive m sur U, on appelle *mesure extérieure d'une fonction* g *de* J^+, le nombre (fini ou non) :

$$m^*\,(g) = \sup_n m(f_n),$$

où f_n est une suite croissante de fonctions de RU ayant pour enveloppe supérieure g.

Il faut maintenant justifier cette définition en montrant qu'elle ne dépend pas, en fait, de la suite f_n choisie.

Proposition 1. Le nombre $m^*(g)$ est bien défini pour tout g de J^+.

Démonstration

Lemme I. Si une suite croissante de fonctions appartenant à RU a pour enveloppe supérieure une fonction de RU, on a pour toute mesure m positive :

$$m(\sup f_n) = \sup_n m(f_n).$$

En effet, les f_n convergent alors vers f pour la pseudo-topologie (P) puisqu'elles convergent uniformément et qu'elles sont toutes inférieures à la fonction f de RU. Le lemme résulte alors de la continuité de m.

Démontrons maintenant la proposition 1. (On peut reprendre la démonstration de Bourbaki (*p. 115) puisque le lemme est précisément l'axiome MA'). Il suffit de montrer que, si deux suites f_n et g_n ont même enveloppe g dans J^+, on a $\sup_n m(f_n) = \sup_n m(g_n)$. Or, on a, en effet, $f_m \leqslant \sup_n g_n$, donc $f_m = \sup_n (\inf (f_m, g_n))$, et en vertu du lemme, si $\inf (f_m, g_n)$ est dans RU avec f_m et g_n, on a

$$m(f_m) \leqslant \sup_n m(\inf (f_m, g_n)) \leqslant \sup_n m(g_n);$$

d'où $\sup_n m(f_n) \leqslant \sup_n m(g_n)$. Et par symétrie on a bien l'égalité. Il reste donc à montrer que $\inf (f_m, g_n)$ est dans RU.

Lemme II. Si f et g sont deux fonctions de RU, $(\sup (f, g)$ et $\inf (f, g)$ y sont aussi.

En effet, il résulte immédiatement de l'axiome (A) que, si u est dans U, $|u(x)|$ y est aussi. Donc, si f est dans R U, f^+ et f^- y sont aussi car

$$f^+ = f + f^- = (|f| +)f/2 \ , \quad f^- = (|f| - f)/2.$$

On a donc la thèse puisque

$$\sup (f, g) = g + (f - g)^+.$$

La démonstration est semblable pour $\inf (f, g)$.

Définition 5

Etant donnée une mesure m positive, on appelle *mesure extérieure* d'une fonction numérique f, le nombre positif (fini ou non) :

(*) Bourbaki [4], livre VI, « Intégration ».

$$m^*(f) = \inf\ m^*(h), \text{ s'il existe un tel } h$$
$$h \geqslant f$$
$$h \in J^+$$
$$= +\infty \text{ dans le cas contraire.}$$

Proposition 2. La mesure extérieure est sousadditive; elle est dditive sur J^+.

En effet,

a) Voyons d'abord l'additivité sur J^+.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions de J^+; il existe donc deux suites roissantes de fonctions de R U tendant vers f_1 et f_2; soient $(f_{1,n})$ t $(f_{2,n})$; il est évident alors que la suite

$$(f_{1,n} + f_{2,n})$$

atisfait aux mêmes conditions par rapport à $f_1 + f_2$. Comme en ertu de la proposition 1 on peut prendre n'importe quelle suite ans la définition de $m^*(g)$ pour $g \in J^+$, on a :

$$m^*(f_1 + f_2) = \sup_n m(f_{1,n} + f_{2,n})$$
$$= \sup_n m(f_{1,n}) + \sup_n m(f_{2,n})$$
$$= m^*(f_1) + m(f_2).$$

b) La sousadditivité générale en résulte immédiatement :

$$m^*(f_1 + f_2) \leqslant m^*(f_1) + m^*(f_2)$$

ar on prend plus de termes pour calculer la borne inférieure dans le membre de gauche que dans celui de droite.

Définition 6

Pour toute fonction u de X dans X', on désignera par $N_1(u, m)$ e nombre :

$$m^*(|u(x)|).$$

Soit F (m) l'espace des applications v de X dans X' telles que :

$$N_1(v, m) < +\infty$$

On vérifie aisément que $N_1(v, m)$ est une semi-norme dans F (m). On dira que cette semi-norme y détermine la *topologie de la convergence en moyenne* (m).

Définition 7

On désignera par V (m) l'adhérence dans F (m) de l'espace U

(adhérence donc au sens de la topologie de F (m) c'est-à-dire de la convergence en moyenne (m)). Les fonctions de V (m) sont dites *intégrables* (m).

Il résulte immédiatement de cette définition que pour qu'une fonction v de X dans X′ appartienne à V (m) il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction u de U telle que :

$$N_1(v - u, m) < \varepsilon.$$

Définition 8

On dit qu'un *ensemble est intégrable* (m) si sa fonction caractéristique est dans V (m).

Définition 9

Un ensemble est dit *mesurable* (m) si son intersection avec tout ensemble intégrable (m) est intégrable (m).

Remarque. Dans ce qui suit, jusqu'à nouvelle indication, m représente toujours une mesure positive sur U.

Proposition 3

Si A_1 et A_2 sont intégrables (m), $A_1 \cup A_2$ est intégrable (m) et, s'ils sont disjoints, on a :

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

En effet :

a) On sait que, si u est dans U, $|u(x)|$ y est aussi (car (A)) donc, si v est dans V(m), $|v(x)|$ est dans V(m) car $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; u \in U$ telle que

$$N_1(v - u, m) < \varepsilon$$

donc telle que : $N_1(|v(x)| - |u(x)|, m) < \varepsilon$.

b) Comme dans le lemme 2, on montre alors que, si f et g sont dans V (m), il en est de même de sup (f, g).

c) $A_1 \cup A_2$ est alors intégrable (m) car on a

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \sup(\varphi A_1, \varphi A_2) \; (*).$$

d) Si les deux ensembles sont disjoints, l'additivité résulte immédiatement de la linéarité de m sur V(m) puisque :

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi A_1 + \varphi A_2$$

(*) φA désigne la fonction caractéristique de A c'est-à-dire : $\varphi A(x) = 1$ si $x \in A$; $\varphi A(x) = 0$ si $x \in A$.

Corollaire. La proposition 1 s'étend immédiatement à un nombre fini d'ensembles.

Proposition 4

Si A_1 et A_2 sont intégrables (m), $A_1 \cap A_2$ est intégrable (m).

En effet :

$$\varphi A_1 \cap A_2 = \varphi A_1 + \varphi A_2 - \varphi A_1 \cup A_2.$$

Proposition 5

Si (f_n) est une suite croissante de fonctions positives de RV(m), pour que l'enveloppe supérieure f de cette suite soit dans RV(m), il faut et il suffit que :

$$\sup_n N_1 (f_n, m) < + \infty.$$

Il en résulte que (f_n) converge en moyenne (m) vers f et que

$$m (f) = \sup_n m (f_n) = \lim_n m (f_n).$$

En effet

Remarquons d'abord que f_n étant positive et dans RV(m), on a :

$$N_1(f_u, m) = m (f_n)$$

et que l'application $f_n \longrightarrow m (f_n)$ étant croissante :

$$\sup_n m (f_n) = \lim_n m (f_n).$$

Or, on démontre (cfr Bourbaki [4] livre VI, Chap. IV, I, th. 3, p. 110) que

$$m^* (\sup f_n) = \sup m^* (f_n),$$

ce qui est précisément notre théorème puisqu'on a alors que

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ N tel que $n \geqslant N \Rightarrow m(f_{n+i} - f_u) = m(f_{n+i}) - m (f_n) \leqslant \varepsilon$

et la suite de f_u converge donc en moyenne (m). Etant croissante ce ne peut être que vers f.

Proposition 6

Soit (A_i) une suite d'ensembles intégrables (m), deux à deux disjoints et telle que $\sum_{i=1}^{\infty} m (A_i) < + \infty$; $\bigcup_i A_i$ est alors intégrable (m) et $m (\bigcup_i A_i) = \sum_i m (A_i)$.

En effet, on a :

$$\varphi \bigcup_i A_i = \sum_i \varphi A_i.$$

Les sommes finies $\sum_{i=1}^{k} \varphi A_i$ sont toutes positives et croissantes avec k, elles sont toutes dans RV(m) en vertu de la proposition 1, on peut donc appliquer la proposition 5 :

$$m\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{k \to \infty} m\left(\sum_{i=1}^{k} \varphi A_i\right) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} m(\varphi A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Théorème I. L'ensemble des A mesurables pour m forme un σ-anneau de parties.

Démonstration

a) Il résulte immédiatement de la définition que tout ensemble mesurable contenu dans un ensemble intégrable est intégrable.

b) La réunion et l'intersection de deux ensembles mesurables sont mesurables. Puisque l'intersection de ces deux ensembles A et A′ avec un intégrable quelconque B est intégrable, on a que :

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

et

$$(A \cap B) \cap (A' \cap B)$$

sont intégrables. $A \cap A'$ et $A \cup A'$ sont donc mesurables.

c) La réunion d'une famille dénombrable de mesurables est mesurable.

Soit (A_i) cette famille. On peut supposer ces A_i disjoints, car, s'ils ne l'étaient pas, on poserait

$$B_j = A_j - \left(A_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)\right)$$

et

i) les B_j seraient disjoints.

ii) ils seraient mesurables par application répétée de *b*).

iii) $\bigcup_{j \in N} B = \bigcup_{i \in N} A_i$.

L'intersection de ces A_j avec un B intégrable quelconque est intégrable et on a :

$$\left(\bigcup_j A_j\right) \cap B = \bigcup_j (A_j \cap B)$$

Cette union : $\bigcup_j (A_j \cap B)$ est intégrable puisque on peut appliquer la prop. 6, car :

$$\sum_i m(A_j \cap B) \leqslant m(B) < +\infty \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Proposition 7

Les espaces F (m) et V (m) sont complets.

En effet, on peut reprendre textuellement la démonstration de Bourbaki [4] : livre VI, chap. IV, par. 3, prop. 5, p. 130, pour l'espace F (m). L'espace V (m) est alors complet comme sous-espace fermé d'un espace complet.

Proposition 8

Tout ensemble mesurable de mesure extérieure finie est intégrable.

En effet, on a :

a) $$m^*(A) = m^*(\varphi A) = \inf_{\substack{h \geqslant A \\ h \in J^+}} m^*(h) < +\infty \quad \text{(définition 5)}$$

Donc : $\forall \varepsilon \exists h$ tel que :

$$m^*(\varphi A) \geqslant m(h) - \varepsilon \qquad (1)$$

b) ces $h \in J^+$, et de mesure extérieure finie, sont intégrables (m), car :

$$m^*(h) = \sup_{\substack{u \leqslant h \\ u \in R\,U^+}} m(u)$$

donc $\forall \varepsilon$, $\exists u$ telle que :

$$m^*(h) \leqslant m(u) + \varepsilon \qquad (2)$$

mais, puisque h-u est encore dans J^+ avec h, on a :

$$m^*(h) = m^*(h\text{-}u) + m(u).$$

Donc :

$$N_1(h\text{-}u) = m^*(h\text{-}u) = m^*(h) - m(u).$$

Donc, en vertu de (2) $\forall \varepsilon$, $\exists u$ telle que :

$$N_1(h\text{-}u) = m^*(h) - m(u) \leqslant \varepsilon.$$

h est donc intégrable (m).

c) les h convergent en moyenne (m) vers φA, car,

$$m^*(\varphi A) \leqslant m^*(\varphi A - h) + m^*(h) = -m^*(h - \varphi A) + m^*(h).$$

Donc :

$$N_1(h - \varphi A) = m^*(h - \varphi A) \leqslant m^*(h) - m^*(\varphi A),$$

et en vertu de (1) :

$$N_1(h - \varphi A) \leqslant \varepsilon.$$

d) puisque V (m) est complet, φA est intégrable (m).

C. Q. F. D.

Théorème II (Théorème de Riesz). m est une mesure (au sens habituel) sur le σ-anneau B (m) de parties des A mesurables.

Démonstration

a) il est immédiat qu'elle est croissante et que la mesure du vide est nulle.

b) l'additivité est évidente pour les ensembles de mesure infinie et les ensembles de mesure finie étant intégrables, (prop. 8) l'additivité est pour eux celle démontrée dans la prop. 3.

c) L'additivité complète est évidente pour des ensembles dont la somme des mesures est infinie. Si la somme des mesures est finie, c'est que chacun des ensembles a une mesure finie et donc est intégrable (prop. 8). Dans ce cas l'additivité complète résulte de la proposition 6.

§ 2. — Intégrale a la Bochner

Dans la suite, nous supposerons que l'espace topologique X est tel que la proposition A suivante soit vérifiée :

Proposition A :

La fonction caractéristique de tout ensemble ouvert (qui est semi-continue inférieurement) est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions continues.

Il serait intéressant de préciser pour quels types d'espaces la proposition A est vérifiée, mais c'est là un problème purement topologique qui sort du cadre de ce travail. Il nous suffira de savoir qu'elle est vérifiée pour les espaces normaux (donc en particulier pour les espaces métriques) (cfr Bourbaki [4], livre III, chap. IX).

Définition I. Une fonction à valeur dans X′ définie sur X est dite mesurable étagée si elle ne prend qu'au plus une infinité

dénombrable de valeurs distinctes, chacune d'elle étant prise sur un ensemble mesurable de X.

Définition II. Une fonction définie sur X et à valeurs dans X′ est dite mesurable si elle appartient à la fermeture de l'ensemble des fonctions mesurables étagées pour la topologie de la convergence en moyenne (m).

Théorème III. Toute fonction intégrable (m) est mesurable.

Démonstration

Soit u une fonction de U. Il suffit de démontrer le théorème pour un tel u. En effet, il est alors vrai pour U. U est donc dans la fermeture de l'ensemble des fonctions mesurables étagées. Comme d'autre part U est dense dans V (m) pour la topologie de la convergence en moyenne (m), V (m) est bien lui-même dans cette fermeture.

Or, pour une fonction quelconque u de U, la propriété résulte des deux lemmes suivants :

Lemme I. Si une suite croissante de fonctions de V(m) converge uniformément vers une fonction de V (m), elle converge vers cette fonction pour la topologie de la convergence en moyenne (m).

En effet, cela résulte immédiatement de la proposition 5, puisque si une suite u_n converge uniformément en croissant vers une fonction v, celle-ci doit être l'enveloppe supérieure de la suite, et d'autre part on a bien :

$$\sup_n \mathrm{N}_1(u_n, m) < +\infty ,$$

puisque les u_n et v sont dans V (m).

Lemme II. Pour tout u de U, il existe une suite de fonctions mesurables étagées v_i qui converge uniformément vers u. Et on peut prendre cette suite de telle sorte que :

a) v_i soit intégrable (m),

b) $|v_i(x)|$ forme une suite croissante qui converge uniformément vers $|u|$.

En effet,

a) soit $\varepsilon > 0$ donné.

Soit $\mathrm{D}_i = \{ x : i\varepsilon < |u(x)| < (i + \mathrm{I})\,\varepsilon \}$

$\mathrm{D}'_i = \{ x : i\varepsilon = |u(x)| \}$

1) Pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ les D_i sont intégrables.

En effet :

a) ils sont ouverts, leur caractéristique est donc une fonction semi-continue inférieurement et elle est l'enveloppe d'une suite de fonctions continues en vertu de la proposition (A). Elle est donc dans J^+.

b) Toutes ces fonctions continues, inférieures à φD_i, sont intégrables (*m*) car elles sont inférieures à :

$$|u(x)|/i\varepsilon$$

qui est une fonction de U et U vérifie, l'axiome (A).

c) φD_i est donc dans J^+ et sa mesure extérieure est finie (puisqu'elle est inférieure à celle de $|u(x)|/i\varepsilon$). φD_i est donc intégrable (cfr démonstration du *b*) de la proposition 8).

On montrerait de même que les D'_i sont intégrables.

II) $D_o \cup D'_o$ est mesurable car c'est le complémentaire de

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i \cup D'_i)$$

qui est mesurable.

e) Soit u_i une valeur de $u(x)$ dont la norme soit $i\varepsilon$.

On a donc :

I) $$u_o = 0,$$

II) $$|u(x) - u_i| \leqslant \varepsilon,$$

III) $|u_i| \leqslant |u(x)|$, pour tout x de $(D_i \cup D'_i)$

Considérons alors :

$$v_{1,\varepsilon} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varphi(D_i \cup D'_i)$$

On a :

I) $v_{1,\varepsilon}$ est intégrable, car pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ φD_i l'est, et pour $i = o$, $u_i = 0$.

II) La suite des $v_{1,\varepsilon}$ pour ε tendant vers o, converge uniformément vers o, puisque

$$|v_{1\varepsilon} - u(x)| \leqslant \varepsilon.$$

III) Si on prend la suite de ε : ε, $\varepsilon/2$, $\varepsilon/3, \ldots, \varepsilon/n \ldots$, les normes des $v_{1,\varepsilon}$ sont évidemment croissantes pour tout x et tendent vers $|u(x)|$.

C. Q. F. D.

Le théorème III est donc démontré.

Définition 12

L'intégrale à la Bochner d'une fonction v mesurable étagée est par définition :

$$(\mathrm{B})\int (x)dm = v \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, m(\mathrm{X}_i),$$

si v prend les valeurs x_i sur les X_i disjoints.

Définition 13

L'intégrale à la Bochner d'une fonction v mesurable est par définition :

$$(\mathrm{B})\int v(x)dm = \lim\,(\mathrm{B})\int v_n(x)\,dm,$$

si les v_n sont la suite de fonctions mesurables étagée qui converge en moyenne (m) vers v.

Théorème IV

L'intégrale à la Bochner des fonctions intégrables (m) est la valeur de m pour ces fonctions.

a) Le théorème est évident pour les fonctions intégrables n'ayant qu'une valeur, car elles sont de la forme :

$$v = u.\ \varphi\mathrm{A}.$$

Donc : $m(v) = u.m(\varphi\mathrm{A}) = u\,m(\mathrm{A}) = (\mathrm{B})\int v\,dm.$

b) Il est donc vrai pour les fonctions étagées mesurables :

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\,\varphi\mathrm{X}_i$$

car, en vertu de la prop. 6,

$$m(v) = m\,(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\,\varphi\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\,m\,(\mathrm{X}_i),$$

donc, $m(v) = (\mathrm{B})\int v dm.$

c) Dans le cas général, on sait (th. III) que toute fonction intégrable est mesurable. Pour tout v intégrable, il existe donc une suite de v_n étagées intégrables qui converge en moyenne vers v :

Or, en vertu de (b) :

$$(\mathrm{B})\int v_m\,dm = m(v).$$

Donc : $\lim$ (B) $\int v_n dm = \lim m(v_n)$,

et comme, par définition, m est continue pour la convergence en moyenne :

$$(B) \int v dm = \lim\ (B) \int v_n\, dm = \lim m(v_n) = m(v).$$

§ 3. — σ-ANNEAUX ET ESPACES U

Soit toujours U un espace vectoriel de fonctions continues et bornées définies dans X normal (ou vérifiant la propriété (A)) et à valeurs dans X′, le champ des scalaires étant C (complexes).

Soit M^+ l'ensemble des mesures positives définies sur U.

A chaque m correspond une notion de fonction intégrable (m), d'ensemble intégrable (m), d'ensemble mesurable (m), de convergence en moyenne (m), de fonction mesurable étagée ou mesurable (m).

Définition 14

Nous désignerons par V l'espace vectoriel des fonctions de X dans X′ qui sont intégrables (m) pour toute mesure m de M^+. Elles seront dites intégrables (U).

On a donc :

$$V = \bigcap_{m \in M^+} V\,(m)$$

Définition 15

Un ensemble est dit intégrable (U) si sa fonction caractéristique est dans γ.

Définition 16

Un ensemble est dit mesurable (U) si son intersection avec tout ensemble intégrable (U) est intégrable (U).

Théorème V

L'ensemble des parties de X mesurables (U) forme un σ-anneau de parties B.

En effet, cela résulte immédiatement de ce que

$$B = \bigcap_{m \in M^+} B(m)$$

Théorème VI

Tout ensemble ouvert tel que sa fonction caractéristique soit inférieure à une fonction de R U, est intégrable (U).

Démonstration

Soit A un tel ouvert avec un u tel que

$$u(x) \geqslant \varphi A\,(x)$$

Toutes les fonctions continues inférieures à φA sont à fortiori inférieures à u, donc sont dans U puisque U vérifie l'axiome (A). φ_A est donc une fonction numérique positive semi-continue inférieurement (car A est ouvert) et enveloppe sup d'une suite de fonctions de U. (en vertu de la proposition (A)). φA est donc dans J^+.

D'autre part, pour tout m de M^+, la mesure extérieure de A est finie puisque qu'elle est inférieure à celle de u.

En vertu de prop. 8 (b), A est donc intégrable pour tout $m \in M^+$.

C. Q. F. D.

Corollaire. La condition nécessaire et suffisante pour que le σ-anneau de parties B des ensembles mesurables (U) ne contienne comme partie intégrable que le vide $\varnothing$, est que U se réduise à la fonction identiquement nulle.

En effet, il est évident que si U se réduit à la fonction nulle le seul ensemble intégrable est le vide (notons que dans ce cas $B = \mathcal{P}(X)$, mais tous les ensembles non vides sont mesurables de mesure infinie).

Réciproquement, si U ne se réduit pas à la fonction nulle, soit u une fonction numérique non nulle. Soit a sa valeur différente de 0 en un point x de X. Puisque u est continue l'ensemble des points tels que

$$a - \varepsilon \leqslant |u(x)| \leqslant a + \varepsilon$$

contient un ouvert de X, soit A. Puisque U est un espace vectoriel la fonction $|u(x)|/(a - \varepsilon)$ est encore dans U. Or φA est maintenant inférieure à cette fonction de U donc en vertu du théorème VI, A est intégrable.

Remarque. S'il existe des ensembles non vides intégrables, il existe des ensembles ouverts intégrables.

Remarquons à ce sujet que contrairement à ce qui se passe dans les espaces localement compacts il n'est pas intéressant de considérer comme espace U l'espace des fonctions continues nulles en dehors d'un compact. Par exemple si X est un espace de Banach de dimension infinie : ces fonctions se réduisent à la fonction identiquement nulle !

Nous n'avons considéré que des mesures positives, mais nous allons voir que c'est suffisant, car l'espace vectoriel de mesures engendré par M^+ est M tout entier, en effet, on a le

Théorème VII. Toute mesure de M est la différence de deux mesures positives.

Démonstration

a) Soit u une fonction de RU^+, posons

$$m^+(u) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u} m(v).$$

Je dis que m^+ est une mesure positive.

I) Il est clair qu'elle est positive puisque pour $v = 0$, on a :

$$m(v) = 0.$$

II) Elle est linéaire sur RU^+. On a :

$$m^+(u_1 + u_2) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u_1 + u_2} m(v)$$

$$\sup \quad m(v) = m^+(u_1) + m^+(u_2)$$

$$v = v_1 + v_2$$

$$0 \leqslant v_1 \leqslant u_1$$

$$0 \leqslant v_2 \leqslant u_2$$

Mais de plus, pour tout w tel que :

$$0 \leqslant w \leqslant u_1 + u_2,$$

on peut trouver deux fonctions de RU^+ : v_1 et v_2 telles que :

$$0 \leqslant v_1 \leqslant u_1$$

$$0 \leqslant v_2 \leqslant u_2$$

$$w = v_1 + v_2.$$

Les deux bornes supérieures portent donc sur les mêmes ensembles, elles sont donc égales.

III) Il est clair qu'il en est de même sur RU puisque si $u \in \mathrm{RU}$, u^+ et u^- y sont aussi, en vertu de l'axiome (A).

IV) m^+ est continue. En effet, considérons une famille (u_i) de fonctions de RU qui pseudo-converge (P) vers une fonction u_0 de RU, c'est-à-dire que (u_i) converge uniformément vers u_0 et que u_i et u_0 sont inférieurs à une fonction fixe de RU, soit u_1.

On a :

$$m^+(u_i) - m^+(u_0) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u_i} m(v) - \sup_{0 \leqslant v \leqslant u_0} m(v).$$

En vertu de la linéarité :

$$= m^+(u_i - u_0) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u_i\, u_0} m(v).$$

Comme u_i converge uniformément vers u_0, on peut prendre i assez grand pour que :

$$|u_i - u_0| \leqslant \varepsilon.$$

Mais comme la convergence est sous u_1, on a

$$|u_i - u_0| \leqslant \varepsilon\, v_1(x)$$

où $v_1(x)$ est une fonction égale à I aux points x tels que $u_1(x) \neq 0$, et égale à 0 aux points x tels que :

$$u_1(x) = 0$$

Et puisque $v_1(x)$ est intégrable avec u_1, la mesure de toute fonction v telle que :

$$0 \leqslant v \leqslant u_i - u_0,$$

est arbitrairement petite avec ε. On a donc bien que pour tout η, on peut trouver I assez grand pour que $i \geqslant \mathrm{I}$ entraîne que :

$$m^+(u_i - u_0) \leqslant \eta.$$

Il suffit, en effet, de prendre :

$$\varepsilon = \eta / m(v_1(x)).$$

b) Il est clair que m^+ étant supérieur à m, $m^+ - m$ est positive. On a donc bien la décomposition annoncée :

$$m = m^+ - (m^+ - m).$$

Corollaire. Les fonctions de V sont intégrables pour toute mesure de M. Il suffit de poser $m(v) = m^+(v) - m^-(v)$.

L'intérêt de cette théorie provient de ce que, en un certain sens, on obtient toutes les mesures : plus précisément on a :

Théorème VIII

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure définie sur le σ-anneau de parties B soit un élément de (M) est que les ensembles intégrables (U) soient de mesure finie.

Démonstration

La condition est évidemment nécessaire, il suffit de montrer qu'elle est suffisante.

Soit m une mesure (au sens ordinaire) définie sur un σ-anneau de parties B contenant comme ensembles de mesure finie les ensembles intégrables (U).

a) Je dis que toute fonction u de U est intégrable (au sens habituel) pour la mesure m.

Considérons, en effet, les ensembles :

$$D_i = \{ x : i\,\varepsilon < |u(x)| < (i+1)\,\varepsilon \}.$$

Ils sont ouverts et, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, leur caractéristique est inférieure à :

$$|u(x)| / i\,\varepsilon.$$

En vertu du théorème VI, ils sont donc intégrables (U). Par hypothèse, ils sont donc intégrables au sens ordinaire.

Les ensembles :

$$D'_i = \{ x : i = |u(x)| \}$$

sont aussi intégrables, car ce sont des ensembles fermés compris dans les ensembles intégrables ouverts :

$$D''_i = \{ x : i\,\varepsilon - \eta < |u(x)| < i\,\varepsilon + \eta \}.$$

On peut alors, comme dans le lemme 2 du théorème III, considérer les fonctions :

$$v_1, \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi D_i \cup D'_i$$

où u_i est une valeur de $u(x)$ dont la norme est $i\,\varepsilon$.

Les v_1, ε, pour une suite de ε décroissante et tendant vers 0, forment une suite de fonctions intégrables au sens ordinaire, croissantes en normes et convergeant uniformément vers $u(x)$. $u(x)$ est donc intégrable au sens ordinaire.

b) Je dis que m est une mesure au sens adopté ici, c'est-à-dire une fonctionnelle linéaire et continue pour la pseudo-topologie (P) sur l'ensemble U.

En effet, la linéarité est une propriété classique de l'intégrale pour les fonctions intégrables et les fonctions de U sont intégrables. La continuité (P) résulte du théorème de Lebesgue qui dit que : si (u_i) est une suite de fonctions intégrables toutes inférieures à une fonction u intégrable et convergeant uniformément vers une fonction intégrable u_0, on a :

$$\int u_0(x)\, dm = \lim_{i \to \infty} \int u_i(x)\, dm.$$

(Pour la démonstration du théorème de Lebesgue, cfr. Lebesgue [22] ou Halmos [16]).

§ 4. — Topologie sur M

M est un espace d'opérations définies sur U et à valeurs dans X'. Ces opérations sont continues pour la pseudo-topologie de U.

Mais pour pouvoir utiliser la théorie de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques il faudrait que U puisse être considéré comme topologique et pas seulement pseudo-topologique. Il nous faut donc maintenant remplacer la pseudo-topologie par une vraie topologie qui puisse rendre les mêmes services.

Soit toujours U un espace de fonctions continues et bornées de X dans X' satisfaisant à l'axiome (A) : si u est dans U, toute fonction continue et bornée telle que, pour tout x, on ait :

$$|v(x)| \leqslant |u(x)|$$

est aussi dans U.

Définition

Nous désignerons par V_u l'ensemble des fonctions v de V (c'est-à-dire des fonctions sommables pour toute mesure de M^+) telles qu'il existe un C avec :

$$|v(x)| \leqslant C_i\ |u(x)| \qquad \text{— } (u \text{ dans U})$$

Théorème IX

V_u est un espace de Banach pour la topologie de la convergence uniforme.

En effet, il suffit de prendre comme norme

$$|v| = \sup_{x \in X} |v(x)|.$$

L'espace V_u est complet pour cette topologie, en effet, si une suite de fonctions de V_u converge uniformément, elle converge pour la pseudo-topologie puisque toutes ces fonctions sont inférieures à un $u(x)$; elle converge donc en moyenne (M) et l'espace V est complet pour cette topologie.

V_u est donc un espace de Banach pour tout u de U.

Considérons la famille C d'espaces de Banach V_u pour tout u de U.

Théorème X. La famille $C = \{V_u\}_{u \in U}$ est telle que l'on peut introduire sur V une topologie de limite inductive des espaces de Banach V_u.

(Pour la définition de limite inductive d'espaces vectoriels topologiques localement convexes cfr. Bourbaki [4] livre V, chapitre II, p. 61).

Démonstration

1°) les espaces V_u étant des espaces de Banach sont localement convexes.

2°) La famille C est filtrante pour la relation d'inclusion. En effet en vertu de l'axiome A et du fait que U est un espace vectoriel, si un ensemble fini $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de fonctions appartient à U il en est de même de inf (u_i) et de sup (u_i). Et $V_{\inf(u_i)}$ et $V_{\sup(u_i)}$ son respectivement minorant et majorant de la famille finie (V_{u_i}). C est donc filtrante.

3°) Si $V_{u_1} \subseteq V_{u_2}$ la topologie induite par V_{u_2} sur V_{u_1} est identique à celle de V_{u_1}.

On est donc dans les conditions permettant de définir une limite inductive de topologies et comme V est l'union des V_u le théorème est démontré.

Théorème XI

Les fonctionnelles linéaires continues pour la vraie topologie sont les mêmes que celles qui sont continues pour la pseudo-topologie.

En effet, les fonctionnelles linéaires continues pour la vraie topologie sont a fortiori continues pour la pseudo-topologie, car on voit immédiatement sur les définitions que la topologie est moins fine que la pseudo-topologie. Montrons réciproquement

qu'une fonctionnelle linéaire continue pour la pseudo-topologie est continue pour la topologie. En effet, si m est une fonctionnelle linéaire pseudo-continue elle est continue sur chacun des V_{u_i}. La propriété résulte alors d'une propriété générale des limites inductives de topologies d'espace de Banach.

Un Banach étant un cas particulier d'espace de Fréchet, on peut alors appliquer les résultats obtenus par Dieudonné et Schwartz : la dualité dans les espaces (F) et (LF) [9] (c'est-à-dire les espaces de Fréchet et les limites inductives d'espaces de Fréchet). Et cela s'applique bien, en vertu du théorème précédent, du fait que les fonctionnelles linéaires continus sont entièrement déterminées sur V par leur connaissance sur U. On a donc directement les deux faits suivants qui nous seront utiles dans la suite :

Théorème XII

Les formes linéaires continues sont identiques aux formes linéaires bornées.

Autrement dit l'espace V est un espace bornologique.

Théorème XIII

Le dual fort de V topologique est complet.

Corollaire. L'espace M est complet.

§ 5. — Théorèmes d'approximation

Nous avons vu que la connaissance de la valeur d'une mesure pour des fonctions appartenant à un certain espace U de fonctions continues et bornées satisfaisant à l'axiome (A) détermine la mesure sur un certain σ-anneau de parties. Nous allons ici poser le problème suivant : trouver des critères permettant de dire si un ensemble donné de fonctions H contient U tout entier dans sa fermeture, fermeture prise pour une topologie par rapport à laquelle m est continue. Notons que s'il en est ainsi la connaissance de la mesure sur H détermine la mesure, car elle la détermine par continuité sur U.

Le principal résultat sera d'étendre le théorème de Weierstrass-Stone sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes. Pour obtenir ce résultat nous utiliserons essentiellement la technique du passage à l'espace de Kakutani.

Rappelons d'abord les théorèmes d'approximation suivants :

1° *Théorème de Dini*

Soit Y un espace compact, H un ensemble de fonctions continues numériques filtrant pour la relation $\leqslant$, (c'est-à-dire un ensemble tel que toute partie finie soit majorée). Si l'enveloppe supérieure f de H est finie et continue dans Y, f peut être approchée uniformément par des fonctions de H.

2° *Théorème de Weierstrass-Stone*

Soient Y un espace compact, H un ensemble de fonctions numériques continues dans Y, séparant les points de Y. Alors toute fonction numérique continue peut être approchée uniformément par des polynomes (à coefficients réels) par rapport aux fonctions de H.

Rappelons que l'on appelle polynome à coefficients réels par rapport aux fonctions de H une fonction

$$g(f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y))$$

où g est un polynome à coefficients réels par rapport à n indéterminées (n quelconque) et les f_i appartiennent à H.

Rappelons ensuite la méthode du passage à l'espace de Kakutani (*).

Soit E un ensemble, m une mesure définie sur un σ-anneau de parties de E telle que E soit mesurable et de mesure finie. Soit B le quotient du σ-anneau de parties par la relation d'équivalence R :

$$A_1 \equiv A_2 \,(R)$$

si et seulement si A_1 et A_2 ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle. On vérifie que (R) est bien une relation d'équivalence et que B est une algèbre de Boole.

Or M. Stone a démontré [31] le théorème suivant :

Théorème de Stone

A toute algèbre de Boole B on peut associer canoniquement un espace compact totalement discontinu Y tel que B soit isomorphe à l'algèbre de Boole des ensembles de Y à la fois ouverts et fermés.

(*) Cf. KAKUTANI [26].

Espace de Kakutani

L'espace que, en vertu du théorème de Stone, on peut associer au σ-anneau quotient défini plus haut, s'appelle espace de Kakutani associé à E et à m. M. Kakutani a montré qu'il existe un isomorphisme entre l'ensemble des fonctions numériques continues sur Y et l'ensemble L^∞ des classes de fonctions sommables et bornées en mesure sur X (classes, car on considère comme équivalentes des fonctions presque partout égales).

M. Kakutani a montré de plus que cet isomorphisme est une isométrie lorsque l'on considère sur l'espace des fonctions continues sur Y la topologie de la convergence uniforme définie par la norme :

$$|f|_Y = \max_{y \in Y} |f(y)|$$

et sur les classes de fonctions sommables bornées en mesure la topologie de la convergence presqu'uniforme définie par la norme au sens de L^∞ :

$|f|_\infty$ est la borne inférieure de l'ensemble des a tels que presque partout on ait : $|f(x)| \leqslant a$.

La technique de l'espace de Kakutani a été notamment utilisée par Dieudonné [8] dans sa démonstration du théorème de Radon-Nikodym.

Il suffit maintenant d'appliquer ces résultats aux théorèmes d'approximation en se plaçant dans un ensemble intégrable A de X. On considère l'espace de Kakutani correspondant à cet ensemble mesurable de mesure finie et on a pour cet espace Y les deux théorèmes d'approximation. Il suffit donc de transposer les conditions des théorèmes à l'espace X en utilisant l'isomorphisme algébrique et topologique démontré par Kakutani entre l'espace des fonctions continues sur Y et l'espace des fonctions sommables bornées en mesures sur A.

a) Soit H un ensemble de fonctions sommables et bornées en mesure définies sur A et filtrant pour la relation $\leqslant$. Son correspondant en vertu de l'isomorphisme algébrique de Kakutani est un ensemble de fonctions continues sur Y filtrant pour la relation $\leqslant$. On est donc dans les conditions d'application du théorème de Dini qui s'énonce :

Théorème généralisé de Dini

Soit A un ensemble intégrable pour une mesure m, H un ensemble

de fonctions sommables, bornées en mesure filtrant pour la relation $\leqslant$. Si l'enveloppe supérieure f de H est finie, sommable et bornée en mesure, f peut être approchée presque uniformément sur A par des fonctions de H.

b) De la même manière, si H est un ensemble de fonctions sommables bornées en mesure et séparant les points de A, son correspondant satisfait aux conditions du théorème de Weierstrass-Stone. On a donc le théorème suivant :

Théorème généralisé de Weierstrass-Stone

Soit A un ensemble intégrable pour une mesure m, H un ensemble de fonctions sommables et bornées en mesure, séparant les points de A. Alors toute fonction sommable, bornée en mesure peut être approchée sur A presqu'uniformément par les polynomes (à coefficients réels) par rapport aux fonctions de H.

(*à suivre*).

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome **70**, nº I, p. 37-61

Deuxième Section

Sciences Physiques et Chimiques

Matrices de projection et techniques d'itération

PAR

B. FRAEYS de VEUBEKE

Sommaire. La détermination par itération des solutions de problèmes aux valeurs propres est un procédé d'un grand intérêt pratique. Pour la recherche d'un mode supérieur on peut éliminer le phénomène de régression vers le mode fondamental (de valeur caractéristique la plus élevée) en modifiant la matrice d'itération ou le noyau de l'équation intégrale. Certains procédés proposés à cet effet constituent implicitement des projections orthogonales ou obliques sur un sous-espace vectoriel orthogonal aux modes à éliminer. L'introduction explicite de matrices de projection permet d'unifier ces méthodes, de les généraliser et d'en clarifier l'application.

Dans une première partie la notion de matrice de projection simple est introduite et discutée ainsi que la construction systématique de projections multiples par un enchaînement de projections simples en pré- ou en postmultiplication.

Dans une seconde partie les matrices de projection sont appliquées à la détermination des modes supérieurs dans les problèmes auto-adjoints. La « déflation » et le « balayage » sont retrouvés à titre de cas particuliers. Les avantages d'un nouveau cas particulier le « balayage en prémultiplication » sont exposés, et la méthode appliquée dans la troisième partie à un exemple numérique simple.

§ I. — Définition et propriétés des matrices de projection

I. 1. *Définition*

Dans un espace vectoriel à n dimensions soient a et b des matrices colonnes représentant deux vecteurs, M une matrice symétrique et définie positive. Avec la condition d'un produit scalaire différent de zéro

$$a' \mathrm{M}\, b = b' \mathrm{M}\, a \neq 0$$

définissons des matrices

$$\mathrm{P} = \frac{a\, b' \mathrm{M}}{b' \mathrm{M}\, a} \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{E} - \mathrm{P} = \mathrm{E} - \frac{a\, b' \mathrm{M}}{b' \mathrm{M}\, a} \tag{1.1}$$

où E désigne la matrice unité.

Il est clair que la multiplication de a ou de b par un scalaire n'affecte pas ces matrices et que seule la direction des vecteurs qui les constituent est significative. Les composantes

$$p = \mathrm{P}\,x \qquad\qquad q = \mathrm{Q}\,x$$

d'un vecteur quelconque x ont les propriétés, de vérification élémentaire, $p + q = x$

$$p = \left(\frac{b'\,\mathrm{M}\,x}{b'\,\mathrm{M}\,a}\right) a$$

$$b'\,\mathrm{M}\,q = 0$$

Le vecteur x se trouve décomposé dans la somme d'un vecteur parallèle à a et d'un vecteur perpendiculaire à b. La matrice Q, considérée comme un opérateur, projette tout vecteur parallèlement à a sur le sous-espace orthogonal à b; c'est une matrice de projection simple. Les définitions introduites sont en accord avec les définitions générales des matrices de projection telles que celle de Hamburger et Grimshaw (1).

I. 2. *Structure d'une matrice de projection*

Mettons en évidence la structure de Q par la recherche de ses vecteurs caractéristiques à droite, qui obéissent à l'équation

$$\mathrm{Q}\,x = \xi\,x \tag{1.2}$$

Substituant la définition de Q il vient

$$(1 - \xi)\,x = \left(\frac{b'\,\mathrm{M}\,x}{b'\,\mathrm{M}\,a}\right) a \tag{1.3}$$

et, multipliant à gauche par $b'\,\mathrm{M}$

$$(1 - \xi)\;b'\,\mathrm{M}\,x = b'\,\mathrm{M}\,x$$

Cette dernière équation a pour solutions soit $\xi = 0$, soit $b'\,\mathrm{M}\,x = 0$, auxquelles correspondent respectivement par (1.3)

$$x \doteq a\ (*) \quad \text{et} \quad \xi = 1.$$

L'équation (1.2) a donc les seules solutions, de vérification immédiate,

$$\mathrm{Q}\,a = 0 \tag{1.4 a}$$

$$\mathrm{Q}\,x = x \quad \text{pour} \quad b'\,\mathrm{M}\,x = 0 \tag{1.4 b}$$

(*) Le symbole $\doteq$ signifie l'égalité à un facteur scalaire près et s'applique de façon générale aux vecteurs caractéristiques.

Elles sont d'ailleurs géométriquement intuitives; (1.4 *a*) exprime qu'un vecteur parallèle au rayon *a* est annulé par la projection, (1.4 *b*) que tout vecteur du sous-espace orthogonal à *b* est conservé.

La recherche des vecteurs caractéristiques à gauche, répondant à l'équation

$$y' \, M \, Q = \eta \, y' \, M \tag{1.5}$$

se ramène à celle des vecteurs caractéristiques à droite pour la matrice duale $Q^{(d)}$, obtenue par échange des rôles de *a* et de *b*.

$$Q^{(d)} = E - \frac{b \, a' \, M}{b' \, M \, a} \tag{1.6}$$

En effet si l'on transpose (1.5) et fait usage de l'identité

$$Q' \, M = M \, Q^{(d)}$$

il vient en simplifiant à gauche par M

$$Q^{(d)} \, y = \eta \, y$$

Les solutions ($\eta = 0$, $y \doteq b$) et ($\eta = 1$, $y' \, M \, a = 0$) de ce problème correspondent donc à

$$b' \, M \, Q = 0 \tag{1.7 a}$$

$$y' \, M \, Q = y' \, M \quad \text{pour} \quad y' \, M \, a = 0 \tag{1.7 b}$$

L'équation (1.7 *a*) exprime que tout vecteur projeté appartient au sous-espace orthogonal à *b*; (1.7 *b*) que le produit scalaire de tout vecteur avec un vecteur orthogonal au rayon est conservé.

De (1.7 *a*) il résulte que pour tout *x*

$$Q \, (Q \, x) = Q \, x \quad \text{c'est-à-dire} \quad Q^2 = Q$$

De même $P^2 = P$. Cette propriété d'idempotence est caractéristique de toute matrice de projection et lui sert parfois de définition générale. Enfin il est utile de remarquer que si la projection est orthogonale, la matrice de projection s'identifie à la matrice duale et le produit M Q devient symétrique.

$$a \doteq b \longrightarrow Q = Q^{(d)} \text{ et } M \, Q = Q' \, M$$

1.3. *Commutabilité d'une matrice Q avec une matrice quelconque A*

La commutabilité implique les conditions nécessaires

$$Q \, A \, a = A \, Q \, a \quad \text{et} \quad b' \, M \, A \, Q = b' \, M \, Q \, A$$

En vertu des propriétés (1.4 *a*) et (1.7 *a*) les seconds membres sont nuls. En vertu des mêmes propriétés la nullité des premiers membres requiert

$$A\,a = \alpha\,a \qquad b'\,M\,A = \beta\,b'\,M$$

Les vecteurs a et $M\,b$ doivent donc être respectivement vecteur caractéristique à droite et vecteur caractéristique à gauche de A. Dans un tel cas il vient par calcul direct

$$A\,Q - Q\,A = (\beta - \alpha)\,\frac{a\,b'\,M}{b'\,M\,a}$$

et il apparaît nécessaire et suffisant que ces vecteurs appartiennent à la même valeur caractéristique : $\alpha = \beta$; auquel cas d'ailleurs la condition $b'\,M\,a \neq 0$ est vérifiée.

1.4. *Produit de deux matrices Q*

Soient $Q_1(a_1, b_1)$ et $Q_2(a_2, b_2)$ deux matrices de projection. On a les conditions nécessaires

$$b'_1\,M\,a_1 \neq 0 \qquad b'_2\,M\,a_2 \neq 0 \tag{1.8}$$

Si a_1 est parallèle à a_2 le produit se comporte comme une projection simple

$$a_1 \doteq a_2 \longrightarrow Q_1\,Q_2 = Q_1 \tag{1.9}$$

Ce résultat se vérifie par calcul direct ou en observant que le vecteur $P_2\,x = (E - Q_2)\,x$ étant parallèle à a_2 et donc à a_1, la propriété (1.4 *a*) entraîne

$$Q_1\,(E - Q_2)\,x = 0$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x implique (1.9).

De même si b_1 est parallèle à b_2

$$b_1 \doteq b_2 \longrightarrow Q_1\,Q_2 = Q_2 \tag{1.10}$$

Car $Q_2\,x$ étant pour tout x orthogonal à b_2 et donc à b_1, la propriété (1.4 *b*) entraîne $Q_1Q_2x = Q_2x$ et implique (1.10). En dehors de ces résultats géométriquement évidents examinons la nature du produit Q_1Q_2 dans le cas plus intéressant où les vecteurs (a_1, a_2) sont linéairement indépendants ainsi que (b_1, b_2). Cherchons dans ce but les vecteurs caractéristiques à droite qui répondent à l'équation

$$Q_1Q_2x = \xi\,x \tag{1.11}$$

Multipliant à gauche par $b'_1 M$ et utilisant (1.7 *a*) il vient

$$\xi (b'_1 M x) = 0$$

Deux cas sont donc à distinguer :

1) $$b'_1 M x \neq 0 \qquad (1.12)$$

Dès lors $\xi = 0$, et il faut rechercher les solutions de

$$Q_1 Q_2 x = 0$$

En vertu de (1.4 *a*) elles doivent aussi satisfaire à la relation

$$Q_2 x = \alpha_1 a_1 \qquad (1.13)$$

Multiplions à gauche par $b'_2 M$ et utilisons (1.4 *b*), il vient

$$\alpha_1 b'_2 M a_1 = 0$$

Distinguons alors les deux sous-cas :

1.*a*) $b'_2 M a_1 \neq 0$ qui entraîne $\alpha_1 = 0$.

L'unique solution de (1.13) est alors $x \doteq a_2$. Dans l'équation (1.11) a_2 est le seul vecteur caractéristique associé à $\xi = 0$.

1.*b*) $$b'_2 M a_1 = 0.$$

Il en découle par (1.4 *b*) $Q_2 a_1 = a_1$ et par (1.4 *a*)

$$Q_1 Q_2 a_1 = 0$$

(1.11) possède ici deux vecteurs caractéristiques associés à la valeur zéro

$$x \doteq a_1 \qquad x \doteq a_2 \qquad \text{pour} \qquad \xi = 0.$$

Observons que les résultats des deux sous-cas ne sont compatibles avec (1.12) que si, outre la première des conditions (1.8) on ait aussi

$$b'_1 M a_2 \neq 0 \qquad (1.12')$$

2) $$b'_1 M x = 0 \qquad (1.14)$$

Le vecteur caractéristique appartient au sous-espace orthogonal à b_1. Par conséquent

$$Q_1 x = x$$

Comme d'autre part, par définition de Q_2

$$Q_2 x = x - \left(\frac{b'_2 M x}{b'_2 M a_2} \right) a_2$$

il vient

$$Q_1 Q_2 x = x - \left(\frac{b'_2 \, M \, x}{b'_2 \, M \, a_2} \right) Q_1 \, a_2$$

d'où, avec (1.11)

$$(1 - \xi) \, x = \left(\frac{b'_2 \, M \, x}{b'_2 \, M \, a_2} \right) Q_1 \, a_2 \qquad (1.15)$$

Enfin, a_2 étant linéairement indépendant de a_1, $Q_1 a_2 \neq 0$ et il découle de (1.15) que

a) à la valeur caractéristique $\xi = 1$ correspondent $(n - 2)$ vecteurs linéairement indépendants satisfaisant à (1.14) et à

$$b'_2 \, M \, x = 0 \qquad (1.16)$$

et formant par conséquent une base du sous-espace orthogonal à b_1 et b_2.

b) Il existe une valeur caractéristique $\xi \neq 1$ associée au vecteur caractéristique $x \doteq Q_1 a_2$ à condition que $b'_2 \, M \, Q_1 \, a_2 \neq 0$.

Le développement de cette condition quand on y remplace Q_1 par son expression devient équivalente à la condition sur le déterminant de Gram

$$\Gamma = \begin{vmatrix} b'_1 \, M \, a_2 & b'_i \, M \, a_2 \\ b'_2 \, M \, a_1 & b'_2 \, M \, a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.17)$$

Par (1.7 *a*) ce vecteur caractéristique satisfait à l'équation (1.14) et la valeur caractéristique explicite est

$$\xi = \frac{(b'_1 \, M \, a_2) \, (b'_2 \, M \, a_1)}{(b'_1 \, M \, a_1) \, (b'_2 \, M \, a_2)} \qquad (1.18)$$

La discussion suivante résume les situations possibles.

Cas général

Les solutions 1.*a* 2.*a* et 2.*b* existent c'est-à-dire

$\xi = 0$ est une racine simple de vecteur $x \doteq a_2$

$\xi = 1$ est une racine de multiplicité $(n - 2)$ associée à $(n - 2)$ vecteurs linéairement indépendants formant un complément orthogonal à b_1 et b_2.

La valeur (1.18) est une racine simple, différente de zéro et de un, associée au vecteur $x \doteq Q_1 a_2$.

Les diviseurs élémentaires sont donc tous linéaires et la matrice est diagonalisable.

Cas particuliers

1. $b'_1 \mathrm{M}\, a_2 \neq 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0$ et par conséquent $\Gamma \neq 0$. Les solutions 1.*b* et 2.*a* existent.

$\xi = 0$ devient une racine double associée aux vecteurs indépendants $x \doteq a_1$ et $x \doteq a_2$.

La solution 2.*b* existe aussi mais elle n'est pas distincte. En effet l'hypothèse $b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0$ entraîne la confluence de (1.18) avec l'unique racine $\xi = 0$ du cas général tout en fournissant un vecteur associé indépendant de a_2. En fait ce vecteur est une combinaison linéaire des deux solutions indépendantes trouvées sub 1.*b*.

2. $b'_1 \mathrm{M}\, a_2 = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 \neq 0$ et par conséquent $\Gamma \neq 0$. Seules les solutions 2.*a* et 2.*b* existent. La solution 2.*b* ne fournit qu'un vecteur caractéristique qui, en vertu de l'hypothèse $b'_1 \mathrm{M}\, a_2 = 0$, est $x \doteq Q_1 a_2 = a_2$ associé à la racine $\xi = 0$.

La même hypothèse entraîne d'ailleurs la relation remarquable

$$Q_1 Q_2 = Q_1 + Q_2 - E \tag{1.19}$$

La matrice est défective et son diviseur élémentaire non-linéaire est relatif à la racine nulle. En effet, multipliant (1.19) à droite par le vecteur a_1, qui est manifestement linéairement indépendant des vecteurs caractéristiques,

$$Q_1 Q_2 a_1 = Q_2 a_1 - a_1 = -\left(\frac{b'_2 \mathrm{M}\, a_1}{b'_2 \mathrm{M}\, a_2}\right) a_2 \tag{1.20}$$

on retrouve le vecteur associé à la racine nulle, multiplié par un facteur scalaire différent de zéro.

3. $\qquad b'_1 \mathrm{M}\, a_2 \neq 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 \neq 0 \quad \Gamma = 0.$

Les solutions 1.*a*, 2.*a* et 2.*b* existent.

Ici la solution 2.*b* correspond en vertu de $\Gamma = 0$ à une racine $\xi = 1$, qui par confluence avec la solution 2.*a* acquiert ainsi la multiplicité $(n - 1)$. Le vecteur associé de la solution 2.*b* n'est pas indépendant des solutions de 2.*a* car il appartient au complément orthogonal de (b_1, b_2). En effet, en vertu de (1.7 *a*) le vecteur $Q_1 a_2$ est orthogonal à b_1; il l'est aussi à b_2 car

$$b'_2 \mathrm{M}\, (Q_1 a_2) = (b'_2 \mathrm{M}\, a_2) - \frac{(b'_2 \mathrm{M}\, a_1)}{(b'_1 \mathrm{M}\, a_1)} (b'_1 \mathrm{M}\, a_2) = 0$$

précisément en vertu de $\Gamma = 0$.

La matrice produit est à nouveau défective mais le diviseur élémentaire non-linéaire est cette fois relatif à la racine $\xi = 1$.

Il reste à examiner le cas doublement particulier :

$$b'_1 \mathrm{M}\, a_2 = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0 \text{ et par conséquent } \Gamma \neq 0.$$

4. Il se rattache logiquement au deuxième cas particulier, car il suffit d'y introduire la deuxième hypothèse au second membre de (1.20) pour voir que a_1 redevient un vecteur caractéristique associé avec a_2 à la racine double $\xi = 0$. Dans son résultat il ne se distingue donc guère du premier cas particulier. Par rapport à ce dernier il présente en plus un caractère de commutativité

$$Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$$

qui peut être établi par calcul direct. Les conditions générales de commutativité, établies à la section 1.3 sont d'ailleurs vérifiées. Par exemple, les hypothèses définissant ce cas assurent bien que a_1 et $\mathrm{M}\, b_1$ sont respectivement vecteur caractéristique à droite et à gauche de Q_2 pour la même racine $\xi = 1$.

Une discussion parallèle peut être conduite pour la recherche des vecteurs caractéristiques à gauche du produit. Il suffit d'ailleurs dans les résultats précédents de substituer y à x, η à ξ et de permuter les rôles de a et b et des indices 1 et 2. En effet η et y sont aussi solutions du problème dual

$$Q_2^{(d)}\, Q_1^{(d)}\, y = \eta\, y$$

Conclusions

Les seuls résultats explicites que nous voulons noter ici sont ceux relatifs au cas particulier

$$b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0 \text{ qui entraîne } Q_1 Q_2 a_1 = 0 \quad Q_1 Q_2 a_2 = 0 \qquad (1.21a)$$

$$Q_1 Q_2 x = x \quad \text{pour} \quad b'_1 \mathrm{M}\, x = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, x = 0 \qquad 1.21b)$$

$$b'_1 \mathrm{M}\, Q_1 Q_2 = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, Q_1 Q_2 = 0 \qquad (1.21c)$$

$$y' \mathrm{M}\, Q_1 Q_2 = y' \mathrm{M} \quad \text{pour} \quad y' \mathrm{M}\, a_1 = 0 \quad y' \mathrm{M}\, a_2 = 0 \qquad (1.21d)$$

Dans ce cas le produit $Q_1 Q_2$ a le caractère d'un opérateur qui projette tout vecteur dans le sous-espace orthogonal à la fois à b_1 et à b_2; c'est une matrice de projection multiple.

La condition $b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0$ est d'ailleurs géométriquement intuitive si l'on observe que, la projection Q_2 opérant la première, il s'indique de choisir le rayon de projection de la suivante dans le sous-espace de projection de la première.

La relation (1.19) est valable à condition d'échanger les indices

$$Q_2Q_1 = Q_1 + Q_2 - E$$

Multipliant alors à droite par Q_2 et faisant usage de l'idempotence de cette matrice

$$Q_2Q_1Q_2 = Q_1Q_2$$

Multipliant encore à gauche par Q_1 et faisant usage de son idempotence

$$(Q_1Q_2)^2 = Q_1Q_2$$

Ceci confirme le caractère général de projection du produit. Si de plus $b'_1 M a_2 = 0$ on a vu que les facteurs du produit deviennent commutables.

Dans la section suivante ces résultats seront généralisés pour un produit de plus de deux projections simples.

1,5. *Chaînes de projections en postmultiplication*

Soit

$$x_{(r)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

une base, non nécessairement orthogonale, de l'espace vectoriel. Proposons nous de construire une suite de projections simples R_m, telles que $R_1R_2 \ldots R_m x$ soit orthogonal pour tout x aux m premiers vecteurs de base. Nous appellerons une telle suite une chaîne pour marquer son caractère de projection multiple.

Sur la base des résultats précédents nous pouvons construire a chaîne progressivement en supposant qu'un produit

$$A_{m-1} = R_1R_2 \ldots R_{m-1} \tag{1.22}$$

ait été construit avec les propriétés

$$A_{m-1} a_s = 0 \tag{1.23a}$$

$$x'_{(s)} M A_{m-1} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots m-1) \tag{1.23b}$$

et en recherchant les éléments (a_m, b_m) de la projection R_m. Les propriétés demandées du nouveau produit $A_m = A_{m-1} R_m$ sont

$$x'_{(r)} M A_m = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots m) \tag{1.24}$$

En multipliant (1.23*b*) à droite par R_m on voit que ces propriétés sont déjà vérifiées pour les valeurs $r = 1, 2, \ldots m-1$, il reste donc la condition

$$x'_{(m)} M A_m = (x'_{(m)} M A_{m-1}) R_m = 0$$

En vertu de (1.7*a*) elle est équivalente à

$$x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1} = b'_m\,\mathrm{M} \qquad (1.25)$$

La simple égalité peut être choisie sans nuire à la généralité du résultat car le facteur scalaire éventuel figure à la fois au numérateur et au dénominateur de l'expression de R_m :

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{E} - \frac{a_m\, b'_m\,\mathrm{M}}{b'_m\,\mathrm{M}\,a_m}$$

Remplaçons y $b'_m\mathrm{M}$ par sa valeur, il vient

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{E} - \frac{a_m\, x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1}}{x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1}\,a_m} \qquad (1.26$$

Dans cette formule le vecteur a_m est soumis à la seule condition de ne pas annuler le dénominateur. Les formules (1.22) et (1.26) permettent le calcul des projections R_m par récurrence.

Il reste à prouver que tout comme (1.24) étend les propriétés (1.23*b*) à une valeur supérieure de l'indice, (1.23*a*) subit l'extension analogue

$$\mathrm{A}_m a_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots m) \qquad (1.27)$$

En effet par (1.22) et (1.25) il vient d'abord

$$b'_m\,\mathrm{M}\,a_s = 0 \qquad (s = 1, 2 \ldots m-1) \qquad (1.28)$$

condition géométriquement intuitive si l'on observe que la projection R_m étant appliquée la première, les rayons des projections suivantes doivent naturellement être contenus dans le sous-espace de projection de R_m. Ensuite, il résulte des relations d'orthogonalité (1.28) et de (1.4 *b*) que

$$\mathrm{R}_m\, a_s = a_s \qquad (s = 1, 2 \ldots m-1) \qquad (1.29)$$

En multipliant cette équation à gauche par A_{m-1} et eu égard à (1.22), la relation (1.27) est déjà vérifiée pour les valeurs $(1, 2 \ldots m-1)$ de l'indice r. Enfin pour $r = m$ elle découle d'une application de (1.4 *a*)

$$\mathrm{R}_m a_m = 0 \longrightarrow \mathrm{A}_m a_m = 0.$$

Il peut être intéressant d'observer qu'en faisant un usage systématique de la relation entre projections duales

$$\mathrm{R}'_m\,\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{R}^{(d)}_m$$

l'équation (1.25) transposée fournit la valeur explicite

$$b_m = \mathrm{R}^{(d)}_{m-1} \ldots \mathrm{R}^{(d)}_2\,\mathrm{R}^{(d)}_1\, x_m \qquad (1.30)$$

Quand cette formule est développée par introduction des expressions

$$R_s^{(d)} = E - \frac{b_s a'_s M}{b'_s M a_s}$$

b_m apparaît comme une combinaison linéaire des b_s antérieurs ($s = 1, 2 \ldots m - 1$) organisée de façon à obtenir son orthogonalité avec les a_s antérieurs. Ce procédé est une extension du processus d'orthogonalisation de Schmidt.

1.6. *Chaînes de projections en prémultiplication*

Une méthode similaire est applicable pour la construction d'une chaîne de projections dont les facteurs sont appliqués successivement en prémultiplication. Une telle chaîne se déduit directement de la chaîne en post-multiplication. Il suffit d'observer qu'en multipliant (1.26) à gauche par $R_1 R_2 \ldots R_{m-1}$, le résultat peut être factorisé sous la forme

$$A_m = L_m R_1 R_2 \ldots R_{m-1} = L_m A_{m-1}$$

où

$$L_m = E - \frac{A_{m-1} a_m x'_{(m)} M}{x'_{(m)} M A_{m-1} a_m} \tag{1.31}$$

est une matrice de projection construite avec $A_{m-1} a_m$ comme rayon et $x_{(m)}$ comme complément orthogonal. De proche en proche

$$A_m = L_m L_{m-1} \ldots L_2 L_1 \tag{1.32}$$

de sorte que suivant (1.31) et (1.32) une matrice L_m se laisse construire par récurrence à partir des L_s ($s = 1, 2 \ldots m - 1$). Ici les projections sont appliquées dans l'ordre de leur formation et l'expression d'un rayon satisfait manifestement aux conditions intuitives suivant lesquelles il appartient au sous-espace dans lequel les vecteurs ont été projetés par les opérations précédentes.

1.7. *Choix particuliers des rayons de projection*

Dans les applications aux problèmes d'itération le choix des rayons a_m sera guidé par les simplifications qui peuvent être obtenues pour la nouvelle matrice d'itération. Dans cette section nous examinons seulement les choix qui simplifient la structure de la matrice de projection elle-même ou qui lui confèrent des propriétés nouvelles.

1°) Le choix $$a_m = b_m \tag{1.33}$$

fait des R_m des projections orthogonales en même temps qu'il assure les conditions indispensables

$$b'_m M a_m = a'_m M b_m \neq 0.$$

De plus comme $R_m = R_m^{(d)}$ on aura par (1.29)

$$a_m = b_m = R_{m-1} \ldots R_2 R_1 x_{(m)} \tag{1.34}$$

Les vecteurs $a_m = b_m$ sont alors construits à partir de la base $x_{(r)}$ par le processus de Schmidt. De (1.29) on tire les propriétés nouvelles

$$R_m b_s = b_s \longrightarrow R_m x_{(s)} = x_{(s)} \quad (s = 1, 2 \ldots m-1) \tag{1.35}$$

De (1.28) et (1.33) il découle que pour deux indices m et r différents

$$b'_m M a_r = 0 \quad b'_r M a_m = 0$$

et donc, étant dans le cas doublement particulier de la section 1.4, deux matrices R_m et R_r quelconques commutent.

Enfin on établit sans difficulté la généralisation de (1.19)

$$A_m = R_1 + R_2 + \ldots + R_m - (m-1) E = E - \sum_1^m \frac{b_r b'_r M}{b'_r M b_r} \tag{1.36}$$

Par suite de la commutativité des matrices R ont peut remplacer (1.34) par

$$a_m = b_m = A_{m-1} x_{(m)} \tag{1.37}$$

Introduisant ceci dans (1.31) et notant que A_{m-1} étant une projection multiple est idempotente

$$L_m = E - \frac{A_{m-1} x_{(m)} x'_{(m)} M}{x'_{(m)} M A_{m-1} x_{(m)}} \tag{1.38}$$

2°) Le résultat (1.38) établit qu'on obtient la même chaîne de matrices en prémultiplication en faisant le choix simple

$$a_m = x_{(m)} \tag{1.39}$$

Il fournit une chaîne de post-multiplication

$$R_m = E - \frac{x_{(m)} x'_{(m)} M A_{m-1}}{x'_{(m)} M A_{m-1} x_{(m)}} \tag{1.40}$$

distincte de la précédente. En particulier ni ces matrices R_m ni les L_m ne sont commutables.

1.8. *Cas d'une base orthogonale*

Les problèmes aux valeurs caractéristiques auto-adjoints présentent le cas de vecteurs caractéristiques $x_{(r)}$ orthogonaux.

$$x'_{(r)} \, \mathrm{M} \, x_{(s)} = 0 \qquad r \neq s \tag{1.41}$$

Dans ce cas on a les nouvelles propriétés générales

$$\mathrm{A}_m \, x_{(t)} = x_{(t)} \qquad (t = m+1, \, m+2 \ldots n) \tag{1.42}$$

Il en résulte que pour l'un ou l'autre choix particulier examiné dans la section précédente

$$b_m = a_m = x_{(m)} \tag{1.43}$$

et

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{L}_m = \mathrm{E} - \frac{x_{(m)} \, x'_{(m)} \, \mathrm{M}}{x'_{(m)} \, \mathrm{M} \, x_{(m)}} \tag{1.44}$$

toutes matrices commutables et jouissant des propriétés sélectives

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_m \, x_{(r)} &= x_{(r)} \qquad & r \neq m \\ &= 0 \qquad & r = m. \end{aligned} \tag{1.45}$$

§ 2. — Application des matrices de projection aux techniques d'itération

2.1. *Problèmes auto-adjoints. Le premier mode*

Seuls les processus d'itération dans les problèmes auto-adjoints seront envisagés ici. La forme typique d'un tel problème à n degrés de liberté est

$$(\mathrm{M} - \lambda \, \mathrm{C}) \, x = 0 \tag{2.1}$$

Dans le cas des petites oscillations autour d'une position d'équilibre, par exemple, M représente la matrice symétrique et définie positive des coefficients d'inertie et C la matrice symétrique des coefficients d'élasticité. La forme (2.1) dérive des équations générales des petits mouvements

$$\mathrm{M} \, \ddot{q} + \mathrm{C} \, q = p \tag{2.2}$$

en supprimant les forces extérieures appliquées au second membre et en séparant la variable temps

$$q = x \, e^{i\omega t} \qquad \lambda = 1/\omega^2$$

Si la position d'équilibre est stable C est aussi définie-positive

et possède un inverse C^{-1}, qui n'est autre que la matrice des coefficients d'influence résolvant le problème statique

$$C\,q = p \qquad q = C^{-1}\,p \tag{2.3}$$

auquel (2.2) se réduit en l'absence d'accélérations.

Le cas où la position d'équilibre est indifférente et C semi-définie positive peut être traité par extension de la notion de coefficient d'influence (II).

Les valeurs caractéristiques sont toutes réelles et positives et nous les supposerons rangées par ordre de valeurs décroissantes

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

Des vecteurs caractéristiques ou modes correspondants $x_{(r)}$ on sait qu'ils sont orthogonaux par rapport à chacune des matrices M ou C.

$$\begin{aligned} x'_{(r)}\,M\,x_{(s)} &= 0 \\ x'_{(r)}\,C\,x_{(s)} &= 0 \end{aligned} \qquad r \neq s \tag{2.4}$$

Ceci a lieu automatiquement à l'intervention de l'équation

$$M\,x_{(r)} = \lambda_r\,C\,x_{(r)} \tag{2.5}$$

que satisfait chaque mode, à condition que $\lambda_r \neq \lambda_s$. Quand une valeur caractéristique est racine multiple on sait aussi que le nombre de modes linéairement indépendants correspond au degré de multiplicité. Dans ce cas, moyennant une éventuelle orthogonalisation de Schmidt, on peut considérer que les équations (2.4) sont toujours satisfaites.

Duncan et Collar (III) ont introduit pour la recherche des modes une technique d'itération basée sur la forme équivalente

$$C^{-1}\,M\,x = \lambda\,x \tag{2.6}$$

de l'équation (2.1). Un vecteur x quelconque admettant une expansion unique

$$x = \sum_{1}^{n} \alpha_r\,x_{(r)}$$

dans la base orthogonale des modes avec les coordonnées

$$\alpha_r = (x'_{(r)}\,M\,x)\,/\,(x'_{(r)}\,M\,x_{(r)})$$

on trouve après application de l'opérateur $C^{-1}\,M$ à gauche et

utilisation des relations

$$C^{-1} M x_{(r)} = \lambda_r x_{(r)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

$$C^{-1} M x = \sum_1^n \alpha_r \lambda_r x_{(r)}$$

et, après m itérations

$$(C^{-1} M)^m x = \sum_1^n \alpha_r \lambda_r^m x_{(r)}$$

Sauf le cas fortuit $\alpha_1 = 0$, les vecteurs itérés convergent vers $x_{(1)}$, dont la valeur caractéristique λ_1 est la plus élevée. Le rapport d'éléments correspondants dans deux itérés successifs converge vers λ_1. Une valeur plus exacte est toujours fournie par l'un ou l'autre des quotients de Rayleigh

$$\lambda = \frac{x' M x}{x' C x} \qquad \lambda = \frac{x' M C^{-1} M x}{x' M x} \tag{2.7}$$

De façon générale pour des erreurs du premier ordre sur les éléments d'un mode ces expressions fournissent la valeur caractéristique avec des erreurs du second ordre seulement.

Si la valeur numérique de λ_1 diffère appréciablement de l'unité les éléments d'un itéré finissent par croître ou décroître démesurément. Le mode n'étant défini qu'à un facteur près une technique usuelle consiste soit à ramener un des éléments du vecteur à une valeur numérique constante avant de répéter l'itération, soit à diviser ce vecteur par son quotient de Rayleigh. La stabilisation du rapport des éléments de deux itérés successifs et sa comparaison avec le quotient de Rayleigh sont alors des indices qui permettent de décider l'arrêt des opérations.

2.2. *Principe de la détermination des modes supérieurs*

Le mode $x_{(1)}$ étant supposé connu on forme une matrice de projection

$$R_1 = E - \frac{a_1 x'_{(1)} M}{x'_{(1)} M a_1} = L_1$$

telle que $R_1 x$ soit orthogonal pour tout x à $x_{(1)}$. Dès lors

$$R_1 x = \beta_2 x_{(2)} + \ldots + \beta_n x_{(n)}$$

ne contient plus en principe la coordonnée β_1.

Sauf le cas fortuit $\beta_2 = 0$, l'utilisation du vecteur initial $R_1 x$ doit assurer la convergence vers le second mode. En pratique cependant $x_{(1)}$ n'est jamais qu'une approximation, ne fût-ce que par la nécessité de limiter le nombre de décimales retenues. Avec $x_{(1)}$, R_1 est aussi une matrice approchée et $R_1 x$ peut contenir une composante qui, aussi faible soit-elle, est renforcée à chaque itération. Il s'impose alors pour forcer la convergence vers $x_{(2)}$ de répéter cycliquement l'application de l'opérateur R_1.

Quand R_1 est une projection orthogonale, l'opération cyclique

$$R_1 x = x - \left(\frac{x'_{(1)} M x}{x'_{(1)} M x_{(1)}} \right) x_{(1)}$$

est en fait l'orthogonalisation purificatrice répétée initialement préconisée par J. J. Koch (IV).

Si l'application de l'opérateur précède ou suit chaque itération il est plus avantageux de former au préalable l'un ou l'autre des produits

$$C^{-1} M R_1 \qquad L_1 C^{-1} M$$

Plus généralement, dans le but de déterminer par itération le mode $x_{(m+1)}$ connaissant les modes précédents, on formera l'une ou l'autre des matrices

$$C^{-1} M A_m \qquad A_m C^{-1} M$$

où, dans le premier cas A_m est progressivement constituée par une chaîne $R_1 R_2 \ldots R_m$, dans le second cas par une chaîne $L_m \ldots L_2 L_1$. Les problèmes modifiés

$$C^{-1} M A_m x = \mu x \qquad A_m C^{-1} M x = \mu x$$

possèdent chacun en vertu de l'équation (1.42) les valeurs caractéristiques $\mu = \lambda_t$ associées aux modes $x_{(t)}$ du problème initial pour les valeurs $(t = m + 1, \ldots, n)$.

De plus pour tous deux $\mu = 0$ est une valeur caractéristique de multiplicité m. Dans le premier cas elle se trouve associée par (1.27) aux modes

$$x \doteq a_r \qquad (r = 1, 2 \ldots m)$$

dans le second cas aux modes solutions du système linéaire à déterminant non-nul

$$C^{-1} M x \doteq a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Il est alors évident que quel que soit le vecteur x initial il ne

reste dès la première itération qu'une combinaison linéaire des

$$x_{(t)} \quad (t = m+1, \ldots, n)$$

et que la convergence de principe vers $x_{(m+1)}$ est assurée.

2.3. *Choix particuliers des rayons de projection*

1°) *Déflation*

On fait l'un ou l'autre des choix de la section 1.7 qui, la base étant orthogonale, conduit aux matrices de projection orthogonale simples définies par (1.44).

Les éléments des deux chaînes étant identiques et commutables on peut à chaque stade les appliquer indifféremment en pré- ou post-multiplication. La justification de cette liberté de choix est d'ailleurs visible sur les propriétés sélectives exprimées par (1.45).

Soit $I^{(m)}$ la matrice d'itération ayant servi à déterminer $x_{(m)}$ de sorte que

$$I^{(m)} x_{(m)} = \lambda_m x_{(m)}$$

Appliquons maintenant l'opérateur

$$R_m = E - \frac{x_{(m)} x'_{(m)} M}{x'_{(m)} M x_{(m)}}$$

en post-multiplication, il vient

$$I^{(m+1)} = I^{(m)} - \lambda_m \frac{x_{(m)} \overline{x'}_{(m)} M}{x'_{(m)} M x_{(m)}} \tag{2.8}$$

Sous cette dernière forme on reconnaît une technique proposée (dans le cas particulier $M = E$) par Hotelling (V) sous le nom de « déflation ».

Elle revient à supprimer successivement les termes du développement spectral de la première matrice d'itération fondamentale

$$I^{(1)} = C^{-1} M = \sum_{1}^{n} \lambda_r \frac{x_{(r)} x'_{(r)} M}{x'_{(r)} M x_{(r)}}$$

Elle revient aussi à soustraire de chaque colonne de $I^{(m)}$ la colonne $x_{(m)}$ multipliée par un facteur

$$\lambda_m \gamma_{mi} \frac{1}{x'_{(m)} M x_{(m)}}$$

où γ_{mi} est l'élément du vecteur $M x_{(m)}$ qui a le même indice i

que la colonne à modifier. Cette interprétation, obtenue en multipliant (2.8) à droite par le vecteur unité e_i, conduit à un calcul numérique plus économique.

2°) *Balayage en post-multiplication*

Traduction du terme « sweeping » introduit par BESKIN (VI), le balayage en post-multiplication est une technique qui remonte aux premiers travaux de DUNCAN et COLLAR (III). Sans le recours au concept de projection sa manipulation algébrique devient rapidement lourde comme en témoigne la théorie générale que FLOMENHOFT (VII) en a faite.

C'est un cas particulier de la technique des chaînes en post-multiplication correspondant aux choix

$$a_m = e_i$$

où e_i est un vecteur unité (dont l'élément figurant à la ligne d'indice i est égal à l'unité, les autres étant nuls).

Pour que le dénominateur de la matrice de projection ne soit pas nul il suffit que l'élément de la ligne $x_{(m)}\,\mathrm{MA}_{m-1}$ à l'intersection de la colonne d'indice i soit différent de zéro. Il est aussi préférable qu'il ne soit pas trop petit comparé aux autres éléments.

Avec la notation

$$x'_{(m)}\,\mathrm{M\,A}_{m-1} = \|\mathcal{H}_1\,\mathcal{H}_2 \ldots \quad \mathcal{H}_m\| \quad \mathcal{H}_i \neq 0 \qquad (2.9)$$

la structure explicite d'une matrice de la chaîne est

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{E} - \frac{e_i\,x'_{(m)}\,\mathrm{M\,A}_{m-1}}{x'_{(m)}\,\mathrm{M\,A}_{m-1}\,e_i} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_i} & -\frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_i} & \ldots & 0 & \ldots & -\frac{\mathcal{H}_n}{\mathcal{H}_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|$$

Par suite du grand nombre d'éléments nuls la postmultiplication par cette matrice est une opération rapide. Notons cependant que la formation de la ligne (2.9) exige la connaissance de A_{m-1}. Pour se réserver la possibilité d'un balayage au stade suivant il

est donc nécessaire en plus de la formation de la nouvelle matrice d'itération

$$I^{(m)} = I^{(m-1)} R_m$$

de former la nouvelle matrice de balayage globale

$$A_m = A_{m-1} R_m$$

Ceci double en pratique le nombre d'opérations et d'inscriptions. L'avantage principal du balayage résulte des propriétés dérivant de (1.27)

$$C^{-1} M A_m e_i = 0 \quad i = (i_1, i_2 \dots i_m)$$

Elles expriment que la nouvelle matrice d'itération possède m colonnes de zéros correspondant aux indices i choisis dans les opérations de balayage. Ceci simplifie l'itération. Supposant, pour simplifier l'exposé, que les valeurs $(i = 1, 2 \dots m)$ aient pu être choisies, la structure de la matrice d'itération sera

$$C^{-1} M A_m = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & U \\ \hline 0 & V \end{array} \right\|$$

où U est une sous-matrice rectangulaire et V une sous-matrice carrée à $(n - m)$ lignes et colonnes. Décomposant alors un vecteur x en deux sous-vecteurs u et v comprenant respectivement les m premiers éléments et les $(n - m)$ restant, il faudra résoudre le problème

$$U v = \lambda u \qquad V v = \lambda v$$

L'itération peut être conduite sur la deuxième équation seulement, la partie u du mode étant obtenue par un usage final de la première équation.

3°) *Balayage en prémultiplication*

Un résultat semblable est obtenu avec une chaîne de prémultiplication basée sur les formules (1.31) et (1.32).

Pour la matrice L_1 faisons le choix

$$a = c_i^{(1)}$$

où $c_i^{(1)}$ est une colonne d'indice i de $C^{-1} M$ satisfaisant

$$x'_{(1)} M c_i^{(1)} \neq 0$$

L'application de L_1 en prémultiplication revient à modifier

les colonnes de la matrice de première itération comme suit

$$c_r^{(2)} = c_r^{(1)} - \frac{(x'_{(1)}\,\mathrm{M}\,c_r^{(1)})}{(x'_{(1)}\,\mathrm{M}\,c_i^{(1)})}\; c_i^{(1)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

On voit que pour $r = i$ la colonne transformée est nulle. A un stade quelconque, désignant par $c_r^{(m)}$ les colonnes de la matrice $\mathrm{A}_m\,\mathrm{C}^{-1}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}^{(m)}$ ayant servi à trouver $x_{(m)}$, le choix $a_m = c_j^{(1)}$ dans L_m fournit pour colonnes de la nouvelle matrice d'itération

$$c_r^{(m+1)} = c_r^{(m)} - \frac{(x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,c_r^{(m)})}{(x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1}\,c_j^{(1)})}\; \mathrm{A}_{m-1}\,c_j^{(1)}$$

Mais

$$\mathrm{A}_{m-1}\,c_j^{(1)} = c_j^{(m)}$$

d'où la formule récurrente

$$c_r^{(m+1)} = c_r^{(m)} - \frac{(x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,c_r^{(m)})}{(x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,c_j^{(m)})}\; c_j^{(m)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n) \tag{2.10}$$

sur laquelle il est apparent que la colonne $c_j^{(m+1)}$ est annulée. Le balayage en prémultiplication a sur celui en postmultiplication l'avantage de ne pas nécessiter la calcul ni l'inscription de la matrice de balayage globale.

Pour une même suite des indices i les deux méthodes de balayage fournissent des matrices d'itération identiques. En effet pour la prémultiplication

$$\mathrm{I}^{(m+1)} = \mathrm{A}^m\,\mathrm{C}^{-1}\,\mathrm{M}$$

possède en vertu de (1.27) la valeur caractéristique zéro associée aux modes solutions de

$$\mathrm{C}^{-1}\,\mathrm{M}\,x \doteq c_i^{(1)} \qquad i = (i_1, i_2 \ldots i_m)$$

Ceux-ci étant manifestement $x \doteq e_i$ comme pour la matrice obtenue par le balayage en post-multiplication et toutes deux ayant, en vertu de (1.42), les mêmes modes $x_{(t)}$ associés aux mêmes valeurs caractéristiques λ_t $(t = m + 1, \ldots, n)$, l'identité annoncée en découle.

La technique de prébalayage, pourtant particulièrement avantageuse, en semble pas avoir été signalée dans la littérature.

§ 3. — Application numérique

Considérons l'équation intégrale des vibrations libres de flexion d'une poutre homogène encastrée à une extrémité ($x = 0$) et libre à l'autre ($x = L$).

$$z(x) = \omega^2 \int_0^L G(x, \xi)\, \rho S\, z(\xi)\, d\xi \qquad (33.1)$$

dans laquelle $z(x)$ est l'amplitude locale de la vibration, ρS la masse répartie constante et $G(x, \xi)$ la fonction de Green. Une méthode rationnelle pour ramener la solution de ce problème à un nombre fini de degrés de liberté consiste à diviser l'intervalle $(0, L)$ en n parties par des points de subdivision ($\xi_0 = 0, \xi_1 \ldots \xi_n = L$) et à remplacer l'intégrale par une somme.

$$z(x) = \omega^2 \rho S \sum_{i=1}^{n} G(x, \xi_i)\, z(\xi_i)\, w(\xi_i) \qquad (3.2)$$

Les $z(\xi_i)$ sont les valeurs de l'amplitude aux points de subdivision et les $w(\xi_i)$ des poids liés au type de quadrature numérique utilisé. Exigeons alors, par collocation, que l'équation (3.2) soit satisfaite aux points de subdivision $(x_1, \ldots, x_n)$; il vient un système homogène de n équations aux n inconnues $z(\xi_i) = z(x_i)$

$$z(x_j) = \omega^2 \rho S \sum_{i=1}^{n} G(x_j, \xi_i)\, z(\xi_i)\, w(\xi_i) \qquad (j = 1,2 \ldots n)$$

Le point $\xi_0 = 0$ n'intervient pas dans ce cas particulier, car $z(0) = 0$ et $G(0, \xi) = 0$ du fait de l'encastrement.

Avec les notations matricielles

$$z = (z(x_j)) \qquad C^{-1} = (G(x_j, \xi_i))$$

et M matrice *diagonale* des $\rho S w(\xi_i)$, le système est de la forme

$$z = \omega^2 C^{-1} M z$$

analogue à (2.6). Ce procédé revient physiquement à concentrer les masses de la poutre continue d'une façon rationnelle aux points de subdivision. Ainsi, pour quatre intervalles de même longueur $h = L/4$ et utilisant la quadrature de Simpson

$$M = \frac{\rho S h}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tandis que par la théorie de la flexion des poutres de raideur EI constante les coefficients d'influence locaux sont

$$C^{-1} = \frac{h^3}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 5 & 16 & 28 & 40 \\ 8 & 28 & 54 & 81 \\ 11 & 40 & 81 & 128 \end{pmatrix}$$

Effectuant la multiplication matricielle et posant $\lambda = \dfrac{18\,EI}{\omega^3 \rho S h^4}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 32 & 11 \\ 20 & 32 & 112 & 40 \\ 32 & 56 & 216 & 81 \\ 44 & 80 & 324 & 128 \end{pmatrix} z = \lambda z \qquad (3.3)$$

Prenant comme vecteur d'essai la première colonne l'itération converge très rapidement vers le premier mode. Nous nous arrêtons à un stade où le rapport des éléments de deux itérés successifs est stabilisé dans ses sept premiers chiffres significatifs

882.67053	328 955.78	372.6824
3082.12960	1148 655.48	372.6824
5975.24655	2226 869.24	372.6824
9078.65760	3383 455.59	372.6824

Prenant alors comme mode le dernier itéré figurant ci-dessus nous formons son produit scalaire avec les colonnes de la matrice d'itération (3.3). A cet effet on se sert de la partie numérique de la matrice des masses. Il vient

490 384 088 856 167 296 3319 659 648 1260 954 388

Pour un prébalayage annulant la première colonne de la nouvelle matrice d'itération on divise ces produits par le premier d'entre eux

1 1.745 912 6.769 509 2.571 361

A chaque colonne de l'ancienne matrice d'itération on soustrait alors la première colonne multipliée par le facteur correspondant déterminé ci-dessus. Il vient la nouvelle matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -3.967\,296 & -22.156\,072 & -9.570\,888 \\ 0 & -2.918\,240 & -23.390\,180 & -11.427\,220 \\ 0 & 0.130\,816 & -0.624\,288 & -1.283\,552 \\ 0 & 3.179\,872 & 26.141\,604 & 14.860\,116 \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

L'itération avec les trois dernières lignes et colonnes assure théoriquement la convergence vers trois derniers éléments d'un second mode. La convergence est ici beaucoup plus lente du fait que la troisième valeur caractéristique est supérieure au cinquième de la seconde. Après une dizaine d'itérations on a trouvé

$$z_{10} = \begin{pmatrix} 507\ 966 \\ 107\ 052 \\ -746\ 626 \end{pmatrix} \qquad z_{11} = \begin{pmatrix} 275\ 877.1 \\ 454\ 552.7 \\ 95\ 795.2 \\ -668\ 117.1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 8.948\ 487 \\ 8.948\ 474 \\ 8.948\ 484 \end{matrix}$$

Le premier élément du dernier itéré a été obtenu à partir des trois éléments du vecteur précédent en utilisant la matrice (3.4) complète. A ce stade on a contrôlé l'exactitude du mode en itérant une fois avec la matrice primitive (3.3). Le nouveau vecteur et les quotients correspondants figurent ci-dessous

$$z_{12} = \begin{pmatrix} 2\ 468\ 702 \\ 4\ 067\ 607 \\ 857\ 296 \\ -5\ 978\ 535 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 8.948\ 557 \\ 8.948\ 592 \\ 8.949\cdot 263 \\ 8.948\ 335 \end{matrix}$$

L'uniformité des quotients est nettement moins bonne; ce qui est une indication de la présence d'une composante du premier mode introduite par les erreurs de troncature dans le balayage. Comme la valeur de λ_1 est connue avec précision, on peut purifier en formant $z_{13} = \lambda_1 z_{11} - z_{12}$. Ce faisant on renforce très légèrement les composantes parasites du troisième et quatrième mode qui sont multipliées respectivement par $(\lambda_1 - \lambda_3)$ et $(\lambda_1 - \lambda_4)$, tandis que le second mode lui-même l'est par $(\lambda_1 - \lambda_2)$. Néanmoins le résultat est meilleur

$$z_{13} = \begin{pmatrix} 100\ 345.8 \\ 165\ 336.2 \\ 34\ 843.9 \\ -243\ 016.9 \end{pmatrix} \qquad z_{14} = \begin{pmatrix} 897\ 947.3 \\ 1479\ 515.2 \\ 311\ 806.3 \\ -2174\ 628.4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 8.948\ 528 \\ 8.948\ 525 \\ 8.948\ 662 \\ 8.948\ 465 \end{matrix}$$

Par un quotient de Rayleigh il vient $\lambda_2 = 8.948\ 508$.

On peut apprécier la valeur du modèle à masses concentrées en notant que la solution du problème exact par l'équation différentielle et les conditions aux limites donne

$$\lambda_1 = 372.74 \qquad \lambda_2 = 9.4905$$

Quoique les modes suivants ne puissent plus prétendre à un rapport raisonnable avec ceux du problème continu il est intéressant de poursuivre le calcul pour examiner l'efficacité de la méthode de balayage. Utilisant z_{13} comme mode, les produits scalaires avec les colonnes de (3.4) ont été formés ainsi que leur quotient par le second d'entre eux

0	—331 191 747	—2 306 742 412	—1 141 041 507
0	1	6.964 976	3.445 259

Un nouveau prébalayage obtenu en soustrayant à chaque colonne de (3.4) la deuxième colonne multipliée par les facteurs qui viennent d'être déterminés fournit la nouvelle matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5.476\,049 & 4.097\,474 \\ 0 & 0 & -3.064\,709 & -1.373\,128 \\ 0 & 0 & -1.535\,418 & -1.734\,247 \\ 0 & 0 & 3.993\,872 & 3.904\,634 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Les dernières valeurs caractéristiques s'obtiennent ici directement en résolvant l'équation séculaire formée sur les éléments des deux dernières lignes et colonnes

$$\lambda_3 = 1.871\,762 \qquad \lambda_4 = 0.497\,454$$

Le contrôle entre la somme des valeurs caractéristiques et la trace de la matrice d'itération primitive est excellent. Examinons la forme du troisième mode. Le rapport de ses deux derniers éléments étant connu, le mode complet s'obtient en une seule itération avec la matrice (3.5) complète

	—5.232 680	— 9.791 774	1.871 273
	—0.746 064	— 1.384 944	1.856 334
2.032 872	3.805 052	— 7.144 070	1.877 522
—3.993 872	—7.475 578	—13.960 176	1.867 437

Les deux dernières colonnes donnent les résultats d'une itération de contrôle par la matrice primitive (3.3). La détérioration des quotients indique la propagation des erreurs de troncature. Une purification s'impose si l'on veut des résultats plus précis. Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à choisir chaque fois pour l'annuler la colonne dont le produit scalaire avec le mode à balayer est le plus élevé en valeur absolue. L'expérience semble indiquer que la déflation est moins sensible aux erreurs sur les

modes, et une étude théorique de la propagation des erreurs dans les deux méthodes serait d'un intérêt considérable.

REFERENCES

(I) H. L. Hamburger and M. E. Grimshaw. Linear transformations in n-dimensional vector space. Cambridge 1951. §-10 pp. 49-57.

(II) B. M. Fraeys de Veubeke. Iteration in semi-definite eigenvalue problems. *Journal of the Aeronautical Sciences*. Vol. 22, N° 10 pp. 710-720, 1955.

(III) W. J. Duncan and A. R. Collar. A method for the solution of oscillation problems by matrices. *Phil. Mag.* May 1934, p. 865.
voir aussi
R. A. Frazer, W. J. Duncan and A. R. Collar. Elementary matrices. Cambridge 1938.
W. J. Duncan and D. D. Lindsay. Methods for calculating the frequencies of overtones. *Aeronautical Research Council. Reports and Memoranda*, N° 1888, 1939.

(IV) J. J. Koch. *Verhand. 2 Intern. Kongr. f. Techn. Mech.* Zürich 1926, pp. 213-218.

(V) H. Hotelling. Simplified calculation of principal components. *Psychometrika*. Vol. I, pp. 27-35, 1936.

(VI) L. Beskin and R. M. Rosenberg. Higher modes of vibration by a method of sweeping. *Journal of the Aeronautical Sciences*. Vol. 13, N° 11, pp. 597-604, 1946.

(VII) H. I. Flomenhoft. A method for the determination of mode shapes and frequencies above the fundamental by matrix iteration. *Journ. Appl. Mech.* Vol. 7, pp. 249-257, 1950.

Université de Liège
Laboratoire d'Aéronautique.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 70, n° I, p. 62-66

Remarques sur un phénomène signalé par M. G. Toraldo di Francia

NOTE DE

Mr. Aug. BIOT

1. Décrit dans les *Atti Fondaz. G. Ronchi* (1) ce phénomène a été dans la suite l'objet, à la « Fondazione Giorgio Ronchi », de discussions recueillies par la même revue (2). Reproduisons ici les faits cités les plus importants.

Les expériences sont conduites comme suit : regardant vers un ciel uniforme on place à quelques centimètres de l'œil un écran (mince) percé d'un trou circulaire de quelques mm de diamètre (3 par exemple; l'expérience réussit avec 0,2 comme avec 10). On s'attendrait à voir un champ circulaire uniforme au centre bordé d'un dégradé en couronne. En fait, il apparaît entre ces deux surfaces un anneau mince plus brillant que le reste du champ. La couronne est plus brillante que le disque central. L'expérience suivante a aussi été faite : un objectif projette un verre dépoli de brillance uniforme sur un autre; on intercale un diaphragme percé d'un trou entre l'objectif et l'image; on *voit* sur celle-ci l'anneau clair signalé plus haut. Un bord rectiligne d'écran peut donner le phénomène qui a été photographié dans ces conditions. Examiné à l'œil la photographie montre les trois zones habituelles. Nous nous étions entretenu avec M. Toraldo de l'opportunité d'examiner cette photographie à l'aide d'un microphotomètre enregistreur. Cette expérience à été décisive : l'enregistrement ne montre *pas* la zone brillante intermédiaire : *le phénomène est subjectif* en ce sens qu'il ne correspond à aucune accumulation d'énergie lumineuse.

2. Observant que dans toutes les expériences visuelles dont il est question ci-dessus il s'agit de l'examen de l'image floue d'un trou (ou d'un bord d'écran) sur la rétine, nous avons obtenu

des conditions d'observation bien plus variées en plaçant devant l'œil, entre l'œil et le trou, une loupe d'un grossissement de 6 à 10 × et en déplaçant l'écran en profondeur devant la lentille. Si, à partir de la position de netteté du trou, on déplace progressivement l'écran vers la lentille, on note facilement l'apparition d'un anneau lumineux qui paraît sortir du bord du trou pour finalement se concentrer en un point, le cercle central ayant disparu. Si, toujours à partir de la position de netteté, on écarte l'écran, on observe les mêmes phénomènes que ceux qui viennent d'être décrits. Mais ici on peut aller au-delà de la position qui correspond au point lumineux : les phénomènes recommencent en sens inverse. Supposons que l'on observe en écartant le trou à partir de la position de netteté.

Dans ces conditions, l'image du trou se fait dans l'œil entre le cristallin et la rétine. Dessinons la pupille de sortie de l'œil, son axe optique et la rétine. Plaçons l'image du trou en différents endroits entre la pupille et la rétine. Il est facile de trouver, en traçant les rayons convenables, la position de l'image du trou qui correspond à un dégradé à partir du centre puis les deux régions sur l'axe où existe, sur la rétine, une zone circulaire centrale uniformément éclairée. Pour ces positions du trou la zone circulaire centrale est plus éclairée que la zone périphérique dégradée dont la limite extérieure est, manifestement, de brillance nulle. Il n'est pas question, ici, d'anneau intermédiaire ni de cercle interne plus sombre que l'anneau. Le phénomène que nous étudions dépend, pour sa symétrie et ses dimensions radiales, de l'optique géométrique de l'expérience. Visuellement il n'en dépend pas *directement* au point de vue des aspects de brillance.

3. Nous opérions avec un écran *fixé* à la loupe à une distance telle de celle-ci que l'anneau se fasse vers le milieu du rayon de la pseudo-image du trou. L'appareil était dirigé soit vers le ciel pur à divers degrés de brillance, soit vers un buvard blanc.

Quand on observe dans ces conditions, on voit de suite qu'il est très difficile d'obtenir des apparences bien reproductibles. En particulier, les mouvements de l'œil devant la loupe, endroit de fixation du regard, ont une grosse importance, de même que la luminosité du fond. Il arrive que l'on observe, pour un instant, un phénomène exactement conforme à ce qui est prévu par l'optique géométrique, c'est-à-dire avec centre plus clair que le dégradé

qui commence assez abruptement et sans anneau clair. Il arrive, quand on fixe un point de cet anneau, que celui-ci disparaisse : le cercle interne paraît sombre et bien neutre, le dégradé se rapproche du cercle et sa couleur apparente se rapproche du bistre. En général, c'est en fixant le centre de la figure que l'on voit le mieux l'anneau clair. En général aussi *il faut un certain temps pour que l'anneau clair s'établisse* — si l'œil est reposé. On remarque aussi que l'aspect de la zone marginale qui devrait être nettement dégradée, tend à s'uniformiser.

C'est surtout le fait que le cercle interne apparaît, contrairement aux prévisions, plus sombre que le liseré qui a attiré notre attention. Nous avons obtenu l'explication de ce fait quand, après avoir fixé l'image du trou assez longtemps, nous avons porté le regard sur le fond (ciel lumineux). Nous avons alors aperçu, se détachant en sombre une image (négative) de ce que nous observions sous la loupe, mais sans que nous puissions noter une apparence que l'on pût faire correspondre à l'anneau clair : disque sombre entouré d'un anneau sombre dégradé.

Il s'agit ici, évidemment d'un effet de fatigue ou peut-être mieux d'adaptation locale de la rétine. On ne voit pas le « trou » avec un œil neuf mais avec un œil modifié et même continûment variable. Evidemment, pour que l'on voie ce que l'on remarque dans la pseudo-image il faut que la sensibilité locale en fonction de la luminosité du stimulus (et du temps) suive certaines lois *que l'on pourrait peut-être préciser par des observations analogues à celles que nous avons décrites ou qui en seraient dérivées.* L'observation que nous signalons explique aussi combien les apparences étudiées dépendent de la durée des expériences et de la position de l'œil.

L'image accidentelle dont nous avons parlé ne disparaît pas immédiatement. En général, après s'être affaiblie, elle disparaît subitement. La rétine toutefois n'a pas repris pour autant sa constitution initiale. Si après avoir opéré sur un fond assez brillant, je pose la main sur l'œil fermé après la disparition de l'image accidentelle primaire dont il est question ci-dessus, je remarque une image accidentelle secondaire colorée : disque vert avec liseré rouge. On ne peut donc faire se suivre de trop près deux expériences successives. Ces phénomènes sont d'ailleurs bien connus, sauf peut-être le bord irisé, peut-être dû à un effet de transmission latérale.

4. Comment expliquer l'anneau brillant ?

En raison de la variation de la sensibilité locale de la rétine qui se produit comme indiqué plus haut, le bord de l'anneau dégradé correspond à une sensation de luminosité plus grande que celle qui correspond aux points du disque central.

Or, on trouve dans Helmholtz [3] la description de l'expérience suivante. On trace sur un disque [4], en noir sur blanc, quatre figures identiques placées en croix, chacune de ces figures étant constituée dans le sens radial par une succession de secteurs courts et minces dont l'ouverture angulaire diminue depuis la région centrale jusqu'au bord ; un des rayons de chaque secteur est posé sur un rayon du disque. La figure forme une espèce d'escalier. Quand on met le disque en rotation rapide autour de son centre, on la voit partagée en anneaux dont la brillance augmente d'un anneau à l'autre vers le bord du disque. De plus, aux coins rentrants de la figure correspondent des anneaux étroits plus brillants et aux angles sortants (il y a là un saut de brillance) correspondent des anneaux étroits plus sombres. Helmholtz donne ce phénomène comme un exemple de contraste. Malgré les différences ne peut-on pas assimiler sous ce rapport le phénomène que nous étudions à celui décrit par Helmholtz et affirmer qu'il s'agit aussi ici d'un effet de contraste ? Convient-il de faire intervenir les mouvements involontaires de l'œil (on constate l'existence de segments clairs quand on observe l'image nette du trou) ?

D'autre part rappelons que l'expérience montre qu'une ligne délimite deux régions dont les éclairements deviennent égaux sur la ligne quand par exemple il y a discontinuité dans la *variation* des éclairements [5]. Et la ligne de séparation est nette. Les éclairements sur la ligne, égaux au commencement de l'expérience ne le restent pas : il s'introduit une discontinuité dans les éclairements finalement perçus.

Par ailleurs deux champs différents jointifs (deux champs photométriques par exemple) ne sont séparés par une ligne claire que quand la diffraction intervient par suite d'une canalisation vicieuse de la lumière. Or il semble bien qu'ici la diffraction ne puisse intervenir.

Enfin souvenons-nous que pour un pointage particulier de la coupe le champ central circulaire disparaît, et que le centre du champ est occupé par un point lumineux dégradé, résidu de l'anneau clair. On est donc porté à attribuer celui-ci à la variation de la

courbure définitive de la courbe subjective de luminosité dans la région périphérique de la pseudo-image avec ou non un effet de contraste ([6]), et probablement avec aussi, un effet dû aux déplacements involontaires de l'œil, conjugué avec l'effet de transmission latérale dont nous parlons plus haut.

([1]) VII, 1952, 324.
([2]) VII, 1952, 392; VIII, 1953, 97; IX, 1954, 15.
([3]) H. von Helmholtz. Lehrbuch der physiologischen Optik; II. — Zweite Aufl. 1911, page 248.
([4]) C'est le « disque de Masson ». Tscherning. Optique physiologique, p. 222.
([5]) H. Bouasse. Vision et reproduction des formes et des couleurs, 2e éd. 1928, p. 345.
([6]) On se rappellera que : « Des limites diffuses favorisent beaucoup l'effet de contraste ». Tscherning, *loc. cit.*, p. 222.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 70, nº I, p. 67-72

Une méthode d'extraction des ions formés dans une combustion vive (*)

PAR

L. VANREUSEL et J. M. DELFOSSE

Certains réactions chimiques sont accompagnées de la formation d'ions, pour autant que ces réactions soient suffisamment vives, et qu'elles se font à températures élevées. Ces conditions sont notamment remplies dans une flamme. En effet, plusieurs chercheurs ([1],[2],[3]) ont élaboré des méthodes différentes pour l'estimation ou la mesure de l'ionisation dans les flammes, et ont trouvé pour le nombre d'ions par cm^3, des valeurs comprises entre 10^6 et 10^{12} selon la flamme envisagée et les conditions de travail. Bien qu'on trouve donc des données quantitatives sur le nombre d'ions dans une certaine flamme, aucun travail n'a été effectué ni sur la nature de ces ions, ni sur le mécanisme qui permettrait d'expliquer d'une manière acceptable leur apparition ([4]).

Les déterminations quantitatives que nous trouvons dans la littérature, concernant l'abondance d'ions dans les flammes ordinaires, nous donnent généralement une valeur de 10^{11} ions environ par cm^3 de gaz à la pression atmosphérique. Donc pour un débit de 5 cm^3/sec, 5.10^{11} ions/sec sont formés, ce qui correspond à un courant ionique de 10^{-8} Amp environ.

Cette intensité, bien que faible, tombe encore dans les limites de sensibilité d'un spectromètre de masse, où on peut mesurer des courants allant jusqu'à 10^{-15} Amp. Il nous a semblé intéressant d'examiner, en partant de ces données, la possibilité d'employer la flamme elle-même pour des recherches en spectrométrie de masse; l'extraction des ions d'une flamme permettrait leur identification ultérieure par cette méthode. On obtiendrait ainsi

(*) Travail effectué sous les auspices de l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture. (I.R.S.I.A.).

directement des informations intéressantes sur le genre d'ions formés et sur le mécanisme de ces réactions.

Le présent article décrit une méthode d'extraction de ces ions.

I. — Les différents aspects du problème

Dans l'étude du problème on rencontre deux difficultés principales. D'abord la faible intensité du courant d'ions. Celle-ci requiert un isolement parfait des différentes parties de l'appareil et une optique ionique convenable afin de diminuer les pertes d'ions déjà importantes.

Cependant la principale difficulté reste le passage de la pression élevée de la flamme, à la pression faible qui doit régner dans le spectromètre lui-même. En effet pour obtenir un spectre suffisamment net, on ne peut pas dépasser une pression de 10^{-5} mm Hg. Par contre, la pression à laquelle les ions sont formés (soit la pression de la flamme) est de l'ordre de 10 à 760 mm, c.-à-d. un million de fois plus grande. De plus la communication entre les espaces où règnent des pressions différentes doit permettre le passage des ions, et la chute de pression doit être réalisée sur la plus courte distance possible, afin de diminuer les pertes par choc et les décharges dans la région intermédiaire, où le libre parcours moyen des ions est encore trop petit.

II. — Principe de la méthode appliquée

Dans le but de diminuer déjà la différence de pression nous avons d'abord préféré étudier des flammes à moyenne pression (50 mm Hg). Ces flammes présentent en plus les avantages suivants : le front de flamme est plan, le brûleur n'est pas chauffé, et le manteau disparaît complètement. Malgré la plus faible pression, obtenue dans la chambre de combustion, il est pratiquement impossible de réaliser la différence de pression exigée, sur une distance suffisamment petite, à travers une série de trous assez larges pour ne pas empêcher ou perturber le passage des ions.

A cet effet nous avons essayé et réalisé une nouvelle technique. La communication entre les différentes chambres à vide n'est assurée que périodiquement. Il en résulte une baisse très sensible

de la pression, même pour un orifice de plus grande dimension que dans le cas où la communication est permanente.

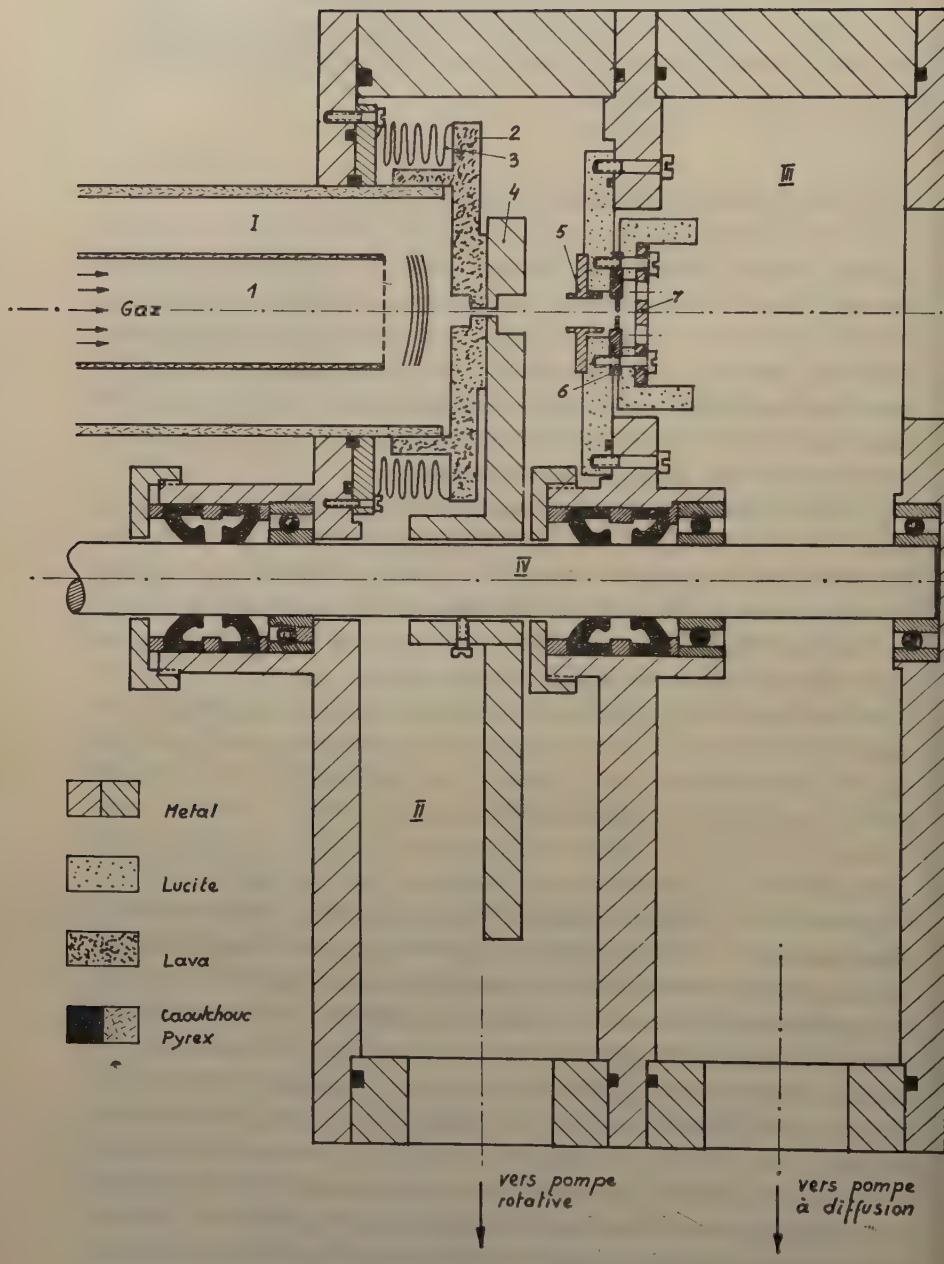
Les ions entrent donc périodiquement en même temps que les gaz, sont ensuite accélérés par un jeu de lentilles et se détachent immédiatement du faisceau.

III. — Réalisation expérimentale

Pour réaliser le principe exposé ci-dessus, plusieurs systèmes ont été étudiés. Finalement nous avons construit un dispositif avec disques tournants. Un disque tournant obture hermétiquement par simple contact, l'orifice entre deux chambres; un petit trou dans le disque passe à chaque révolution devant le trou fixe dans la paroi commune, permettant ainsi, pour un court instant, la communication entre les deux chambres.

Il fallait donc trouver les matériaux appropriés, capables de tenir le vide suffisamment par simple contact, et de permettre aux disques de tourner assez vite sans échauffement exagéré. En effet, on ne peut graisser les surfaces en contact sans risquer de boucher l'orifice. Le graphite, tel qu'il est employé dans les balais de moteur, semblait être le matériau approprié, il dut par la suite être écarté à cause de sa porosité. Après de longs tâtonnements on a choisi finalement des disques en laiton poli, frottants sur des coussins en « lava » polis. (Cette substance est un produit spécial isolant qui se laisse facilement travailler et durcit après cuisson).

Les détails de montage sont indiqués dans la figure ci-jointe. L'appareil est composé essentiellement de trois chambres consécutives (I, II et III). La première I est la chambre de combustion. Elle consiste en un cylindre en pyrex de 65 mm de diamètre, pourvu latéralement de deux canalisations de pompage et d'un dispositif pour l'allumage des gaz. Au centre de ce cylindre se trouve le brûleur proprement dit (1). Celui-ci est un tube en pyrex d'un diamètre de 30 mm, muni à son embouchure d'un fin grillage en cuivre. D'un côté le cylindre est fermé par une plaque de cuivre qui porte le brûleur à travers un joint étanche (Simmer-ring), et qui est pourvue de quelques électrodes verre-métal pour l'application des tensions électriques. De l'autre côté le cylindre s'enfonce dans la paroi de la chambre II et y est maintenu hermétiquement


2
3
4
I
5
III
1
Gaz
7
6
IV
II
Metal
Lucite
Lava
Caoutchouc
Pyrex
vers pompe
rotative
vers pompe
à diffusion

par un anneau en caoutchouc. Une plaque en lava (2) percée d'un trou de 1,5 mm et collée sur une membrane flexible (3) le sépare du volume de la deuxième chambre. Cette deuxième chambre II est formée par un cylindre en fer d'un diamètre extérieur de 300 mm, d'une épaisseur de paroi de 25 mm et d'une longueur de 67 mm, fermé par deux plaques en fer munis de joints en caoutchouc. Les deux parois latérales portent toutes les deux au centre un cylindre soudé pour le logement d'un roulement à billes et d'un système de bagues d'étanchéité (Simmer-ring) permettant le passage sous vide de l'axe de rotation IV. Le disque (7) appliqué contre la surface en lava (2) obture le passage vers la chambre de combustion. Ce disque est percé d'un trou de 2 mm de diamètre à une distance de l'axe de 70 mm; la communication entre les deux chambres n'est donc assurée que pendant 1/200 du temps d'une révolution. La chambre III est presque identique à la chambre II. Dans la paroi commune et dans la prolongation de la chambre de combustion est percé un trou de 55 mm de diamètre, fermé par une plaque en lucite. Cette plaque porte un jeu de lentilles se composant d'un cylindre (5), d'un disque perforé d'un trou de 1,5 mm (6) reliant les chambres II et III, et d'un collecteur d'ions (7) dans la chambre III.

Les chambres II et III sont fixées entre elles par de longues vis à travers les parois cylindriques. Le bloc formé par ces deux chambres est isolé électriquement de tout le reste de l'appareillage.

L'axe de rotation IV portant le disque (4) traverse les chambres II et III; il est raccordé au moyen d'un arbre de transmission flexible (pour éviter les vibrations) à un moteur de 3/4 HP pourvu d'une démultiplication 1/4. La vitesse de rotation du disque est alors d'environ 350 t/min.

IV. — Premiers résultats

La chambre de combustion est raccordée à une pompe rotative de 5 m^3/h, les chambres II et III respectivement à une pompe rotative de 50 m^3/h et à une pompe à diffusion de 100 l/sec. Du brûleur (1) jusqu'à la plaque réceptrice (7) les ions sont accélérés par une différence de tension progressive de 500 V au total.

Le débit des gaz de combustion est réglé de façon à entretenir une pression de 50 mm dans la chambre de combustion. Le gaz

est allumé au moyen d'un filament de platine incandescent. Quand le disque tourne, la pression en II descend jusqu'à 10^{-3} mm Hg environ, tandis que la pression en III reste inchangée c.-à-d. 10^{-5} mm Hg.

En avançant le brûleur (1) vers le trou dans la plaque en lava (2) on mesure un faible courant sur la lentille (5) à partir d'une distance de 25 mm environ entre la flamme et cette plaque (2). Ce courant augmente au fur et à mesure qu'on rapproche la flamme de la plaque (2); le maximum atteint est de 6.10^{-9} Amp. Dans ces conditions le courant d'ions mesuré sur le collecteur (7) dans la chambre III est de 10^{-10} Amp.

V. — Conclusions

Le système décrit ci-dessus nous donne la possibilité d'extraire des ions formés dans une flamme. Le chemin total parcouru par les ions pour passer d'une pression de 50 mm à 10^{-5} mm Hg ne dépasse par 50 mm. Les pertes de courant dans le système optique sont minimes et le courant résiduel de 10^{-10} Amp permettra ultérieurement une identification des ions dans un spectromètre de masse.

Nous tenons à remercier l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture (I.R.S.I.A.) qui par son aide financière a rendu possible le présent travail. Nous remercions tout spécialement le professeur Van Tiggelen qui nous a proposé le problème et qui n'a pas cessé de nous montrer son vif intérêt. Nos remerciements vont aussi à la direction et au personnel du centre de physique nucléaire de Louvain où ce travail a été effectué.

Louvain, Janvier 1956.

RÉFÉRENCES :

(1) H. Belcher and T. M. Sugden. Ionisation in Flames. *Proc. Roy. Soc.* A vol. 202, 17 (1950).

(2) Calcote H. F. Electrical properties of Flames. — Burner flames in transverse electric Fields. *Third Symposium on Combustion.* Paper n° 29 (1949).

(3) Gaydon and Wolfhard. Flames, their structure, radiation and temperature. Chapman and Hall, London 1953, p. 296.

(4) Idem, pp. 299-300.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 70, nº I, p. 73-79

Étude de la réaction nucléaire $Al^{27}(n, p)Mg^{27}$ avec neutrons de 14 MeV

PAR

Y. OSHIMA

Centre de Physique Nucléaire, Université de Louvain

Résumé. The angular distribution of the protons produced in the nuclear reaction $Al^{27}(n, p)Mg^{27}$ by 14-MeV neutrons was observed with nuclear emulsions. We have measured only the ground state angular distribution and it is in agreement with the theory of Austern, Butler and McManus based on the surface scattering (n, p) for $l = 0$. We also have measured the angular distribution of the neutron inelastic scattering.

Introduction

Des mesures récentes de la section efficace totale de la réaction nucléaire $X(n, p)Y$ effectuées avec des neutrons de 14 MeV montrent que, pour les noyaux lourds, la section efficace mesurée est beaucoup plus grande que celle calculée par la théorie statistique ([1]). Pour expliquer ces divergences, McManus et Sharp ([2]) ont proposé un nouveau mécanisme pour les réactions du type (n, p). Quand l'énergie des particules incidentes est comprise entre 10 MeV et 30 MeV, au lieu d'avoir, par capture du neutron, formation d'un noyau composé, la collision a lieu à la surface du noyau, entre le neutron incident et un des protons qui s'y trouvent. A partir de ce mécanisme, la distribution angulaire des protons émis dans la réaction (n, p) peut être calculée comme l'a fait Butler pour la réaction de stripping. Le calcul a été fait d'abord par Austern, Butler et McManus ([3]) et plus tard par Demeur ([4]) en supposant que 1) L'énergie de liaison du proton émis est extrêmement faible, 2) L'interaction entre le neutron incident et le proton émis est nulle, sauf quand les deux particules sont suffisamment proches; c'est-à-dire que l'interaction V_{np} est donnée par : $V_{np} = V\,\delta(\vec{r}_n - \vec{r}_p)$. Ils ont obtenu l'équation suivante pour la distribution angulaire de la réaction (n, p).

$$\sigma \propto \sum_l C^2_{lnlp}(l, 0; 0, 0)\,[j_l\,(kR)]^2$$

où C_{lnlp} $(l, 0; 0, 0)$ est le coefficient de Clebsh-Gordan, j_l la fonction de Bessel sphérique, $k = |\vec{k}^n - \vec{k}_p|$, le nombre d'ondes résultant de la différence vectorielle du nombre d'ondes du neutron incident et de celui du proton émis, et R est le rayon du noyau, pour lequel il y a interaction entre le neutron et le proton. D'après la conservation du moment angulaire

$$j_i + j_f + 1 \geqslant l \geqslant | \pm j_i \pm j_f \pm 1 |_{\text{min.}},$$

où j_i est le spin du noyau initial et j_f le spin du noyau final. Cette théorie concorde avec les expériences faites sur des collisions inélastiques (p, p') [5] [6] et les réactions (p, n) [7]. Leurs distributions angulaires présentent des pics marqués dans la direction avant.

Dans le présent travail nous avons étudié la distribution angulaire de la réaction nucléaire Al^{27} (n, p) Mg^{27} au moyen de neutrons de 14 MeV, et avons confronté nos résultats avec la théorie d'Austern et al. En même temps nous avons étudié la distribution angulaire des neutrons inélastiques de l'Al^{27}.

Méthode expérimentale

Les neutrons de 14 MeV sont produits par la réaction nucléaire $T^3(d, n)$ He^4. La cible de tritium-zirconium a été fournie par l'Atomic Energy Research Establishment d'Harwell en Angleterre. Le deutérium est accéléré à environ 400 keV par la machine de

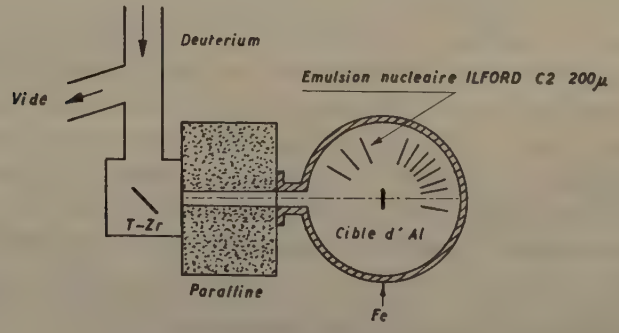


FIG.1 DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Van de Graaff. L'énergie des neutrons est mesurée par des plaques à émulsions nucléaires. Elle vaut 14,2 MeV.

Nous avons employé les plaques à émulsions nucléaires Ilford C2 200 μ comme détecteur de protons et de neutrons. Le dispositif expérimental est représenté à la figure 1. La cible d'aluminium est placée au centre; autour de la cible des plaques nucléaires sont placées de 10 en 10 degrés. Chaque plaque est inclinée de six degrés sur la direction d'émission des particules. Les dimensions des plaques à émulsions nucléaires sont de $2'' \times 1''$. Entre la source de neutrons et la chambre à plaques nucléaires, est placé un bloc de paraffine qui empêche des neutrons de la source d'arriver directement sur les plaques. Comme cible d'aluminium nous avons employé trois épaisseurs différentes : 2,7 mg/cm², 8,1 mg/cm² et 10,8 mg/cm².

Après quatre heures de bombardement avec un courant moyen de deutérium de 8 μA, les plaques à émulsions nucléaires sont développées en les plongeant dans la solution de « ID-19 » d'Ilford pendant quarante minutes et fixées dans la solution d'hyposulfite de soude pendant trois heures et demie. La longueur des traces dans les plaques est mesurée au microscope « Ortholux » (Leitz). On compte les traces formant, avec la direction d'émission des par-

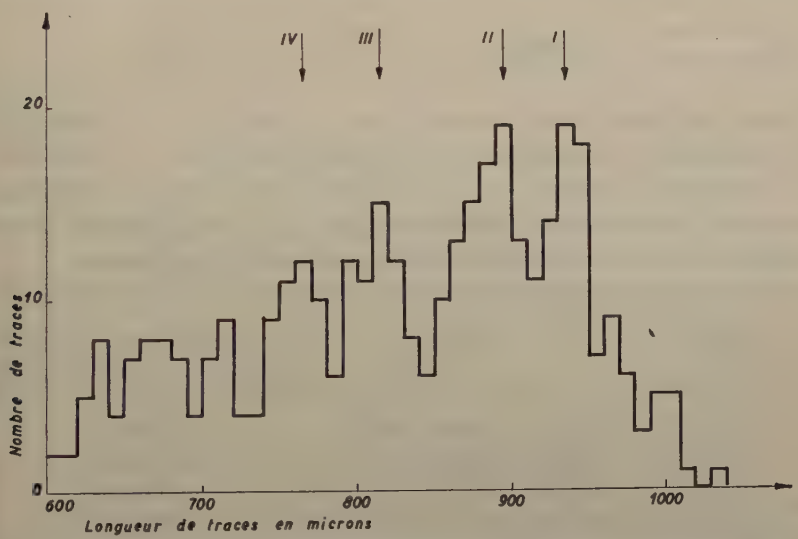


FIG. 2 SPECTRE DE PARTICULES EMISES PAR L'Al^{27} PAR BOMBARDEMENT DE 14 MeV DANS LA PLAQUE A 10°

ticules, un angle inférieur à 15 degrés et dont la longueur est supérieure à 600 μ.

Les résultats de ces mesures sont donnés dans les figures 2 et 3. La figure 2 montre le spectre des protons directs et des protons de recul dans la plaque située à 10 degrés par rapport au faisceau de neutrons incidents et la figure 3 montre le spectre dans la plaque située à 30 degrés. Les intervalles de l'histogramme sont de 10 μ. La correction à introduire dans le spectre des neutrons du fait de la variation de la section efficace de collision *n-p* n'a pas encore été faite.

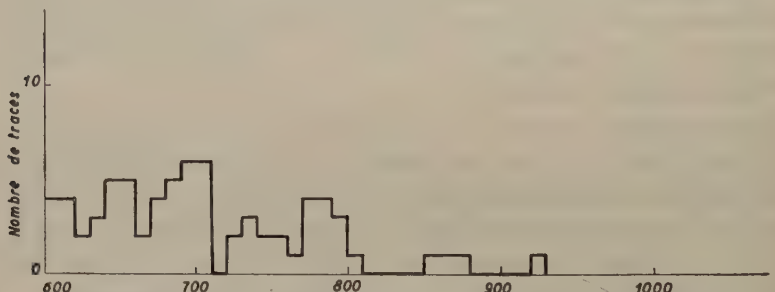


FIG. 3 SPECTRE DE PARTICULES EMISES PAR L'Al^{27} PAR BOMBARDEMENT DE NEUTRONS DE 14 MeV DANS LA PLAQUE A 30°

Résultats et discussion

On a représenté les niveaux de l'Al^{27} et du Mg^{27} à la figure 4 ([8]). La valeur de Q de la réaction $Al^{27}(n, p)Mg^{27}$ est égale à — 1,829 MeV. En calculant l'énergie des particules émises dans les réactions possibles, on trouve que les pics repris à la figure 2 correspondent aux protons et neutrons des réactions nucléaires suivantes :

Groupe	Réaction	Energie des particules émises dans le laboratoire
I	$Al^{27}(n, n')\ Al^{27*}(0{,}843)$	13,35 MeV
II	$Al^{27}(n, n')\ Al^{27*}(1{,}01)$	13,19 MeV
III	$Al^{27}(n, p)\ Mg^{27}$	12,35 MeV
IV	$Al^{27}(n, n')\ Al^{27*}(2{,}23)$	11,96 MeV

Nous n'avons pratiquement pas observé les neutrons élastiques de l'Al^{27}.

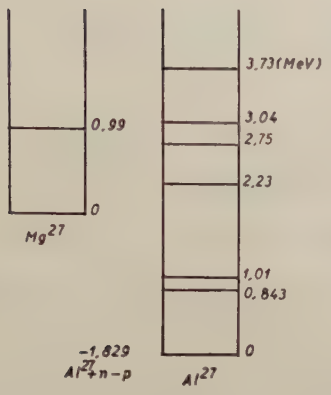


FIG. 4 NIVEAUX DE L'Al^{27} ET DU Mg^{27}

1) *Réaction* Al^{27} (n, p) Mg^{27}

L'allure de la distribution angulaire pour cette réaction est reproduite à la figure 5. Dans la figure, la courbe théorique est donnée par $[j_0(kR)]^2$, où, comme rayon du noyau de l'Al^{27}, nous

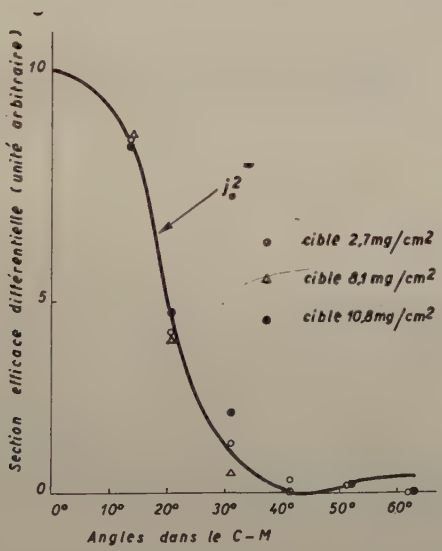


FIG. 5 DISTRIBUTION ANGULAIRE DES PROTONS PROVENANT DE LA REACTION $Al^{27}(n,p)Mg^{27}$

avons pris $R = 5{,}5 \times 10^{-13}$ cm. Les résultats expérimentaux s'accordent bien avec la courbe théorique.

Or si nous nous reportons à l'équation de conservation du moment angulaire,

$$j_i + j_f + 1 \geqslant l \geqslant | \pm j_i \pm j_f \pm 1 |_{\text{min.}},$$

on voit que, en se basant sur la conservation de la parité et sur les valeurs du spin de l'$Al^{27} = \frac{5^+}{2}$ et celui de $Mg^{27} = \frac{1^+}{2}$ obtenu d'après les résultats de la réaction de stripping Mg^{26} (d, p) Mg^{27} effectuée par Holt et Marsham ([9]), on doit avoir $l = 2, 4$. La distribution angulaire doit, d'après la théorie de Austern et al. basée sur la collision de surface (n, p), être proportionelle à $[j_2(kR)]^2$ et $[j_4(kR)]^2$. Or notre courbe expérimentale ne s'accorde avec la courbe théorique de Austern et al. que pour $l = 0$. Il y a donc un désaccord entre la théorie de Austern et al. et nos résultats.

On pourrait éventuellement retrouver un désaccord semblable dans les résultats expérimentaux de Schrank et al. ([6]) Il semble en effet difficile d'expliquer le début de la courbe expérimentale que ces auteurs ont obtenue, si on ne tient pas compte de la possibilité $l = 0$. Or cette valeur n'est pas compatible avec l'équation de conservation du moment angulaire pour la réaction Fe^{56} (p, p') Fe^{56*}.

Ce résultat montre que la réaction Al^{27} (n, p) Mg^{27} induite par des neutrons de 14 MeV diffère de celle représentée par l'évaporation du noyau composé. Il semble que la collision ait lieu à la surface du noyau entre le neutron incident et un des protons qui s'y trouvent.

2) *Neutrons inélastiques*

Les distributions angulaires des neutrons inélastiques provenant des différents niveaux excités du noyau d'Al^{27} sont représentées à la figure 6. La correction due à la section efficace totale de collision entre le neutron et le proton est retenue pour le dénombrement des neutrons ([10]). Les erreurs présentées dans la figure sont des erreurs statistiques. Les résultats expérimentaux s'accordent avec la théorie d'Austern et al. pour $l = 0$. Notons que nous avons toujours observé un pic marqué dans la direction avant. Mais pour étudier les collisions inélastiques des neutrons, nos expériences ont été faites dans de mauvaises conditions au point

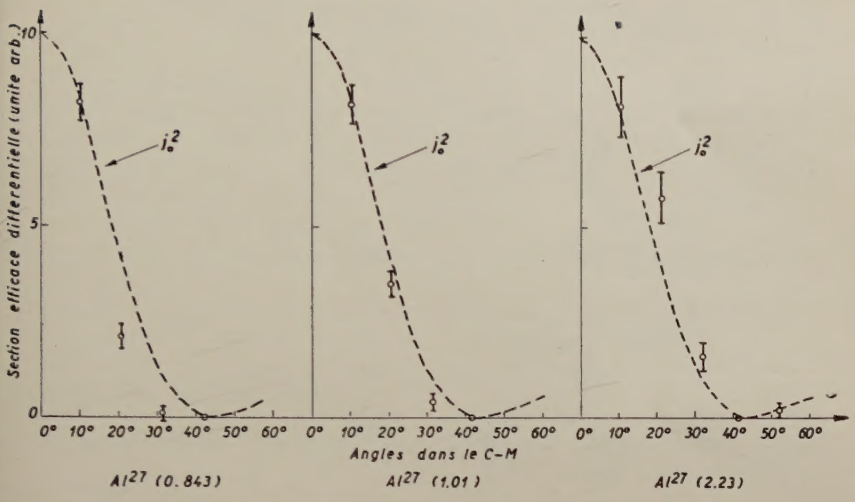


FIG. 6 DISTRIBUTION ANGULAIRE DES NEUTRONS INELASTIQUES DE L'Al^{27}

de vue de la géométrie expérimentale. D'après la distribution angulaire, il semble que la collision ait lieu plutôt à la surface du noyau, mais il faudrait étudier la distribution angulaire avec une meilleure géométrie ([11]).

Que M. le Professeur de Hemptinne qui, par de nombreuses discussions, a marqué tant d'intérêt à ce travail soit assuré de tous nos remerciements; merci également à M. Sternicki qui a bien voulu développer les plaques à émulsions nucléaires.

RÉFÉRENCES

([1]) E. B. Paul et R. L. Clarke, *Can. J. Phys.* **31**, 267 (1953).
([2]) H. McManus et W. T. Sharp, *Phys. Rev.* **87**, 188 (1952).
([3]) N. Austern, S. T. Butler et H. McManus. *Phys. Rev.* **92**, 350 (1953).
([4]) M. Demeur, *J. Phys. et le Radium* **16**, 73 (1955).
([5]) R. M. Eisberg et G. Igo, *Phys. Rev.* **93**, 1039 (1954).
([6]) G. Schrank, P. C. Gugelot et I. E. Dayton, *Phys. Rev.* **96**, 1156 (1954).
([7]) B. L. Cohen, *Phys. Rev.* **98**, 49 (1955).
([8]) P. M. Endt et J. C. Kluyver, *Rev. Mod. Phys.* **26**, 95 (1954).
([9]) J. R. Holt et T. N. Marsham, *Proc. Phys. Soc.* A**66**, 258 (1953).
([10]) L. Rosen, *Nucleonics*, July 33 et August 38 (1953).
([11]) H. H. Barshall, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 120 (1952).

(26142) Imprimerie Ceuterick, s.c., 66 rue Vital Decoster, Louvain.
Resp. L. Pitsi, 25 rue Dagobert, Louvain (Belgique).

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique)

PRIX D'ABONNEMENT

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs belges
abonnement d'honneur	1000 francs belges
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120 boulevard St Germain, Paris 6e)	1400 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)	280 francs belges

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQU

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,0

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,0
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,0
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 —(1929 à 1933) fr. 40,0
(1931 à 1936) fr. 20,0
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,0
(1931 à 1936) fr. 100,0
Série I (sc. mathématiques et physiques),tt.LVII àLXVII(1937 à 1953) fr. 70,0
tt. LXVIII et LXIX(1954 et 1955) fr. 100,0
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,0
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . fr. 100,0

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . fr. 200,0
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. 60,0
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels. . fr. 200,0
Le fascicule . . . . . fr. 40,0
t. CXVII(1940 et 1946),tt. CXVIII à CXXVI(1947 à 1955)Le volume fr. 200,0
Le fascicule . . . . . fr. 60,0

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. 20,0
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. 40,0

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. 20,0
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. 20,0
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. 30,0

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00 autres pays, 30,00 fr.

II. — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents Un vol. in-8° de 9 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays fr. 30,00.

IV. — F. Kaisin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique Un vol. in 8°- de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES MEDICALES

I. — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00; autres pays, fr. 90,00

III. — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8 de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autre pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I. — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularité en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . fr. 20,0

II. — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vo de 50 pages . . . . . fr. 10,0

III. — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travai en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . fr. 60,0